粒子与波

——第51届国际物理奥赛理论第三题解答

杨佳心　宋　峰

（南开大学物理科学学院　300071）

A部分　腔内的微观粒子(1.4分)

A.1(0.4分)

势阱的宽度(L)应该等于德布罗意驻波波长λ_{dB}的一半，即

$L=\lambda_{dB}/2$

而德布罗意驻波波长

$\lambda_{dB}=h/p$

其中，h是普朗克常量，p是粒子的动量。因此有

$p=h/\lambda_{dB}=h/(2L)$

粒子的最小可能能量为

$$E_{min}=\frac{p^2}{2m}=\frac{h^2}{8mL^2}$$

A.2(0.6分)

势阱应该适合德布罗意半波长的整数倍

$$L=\frac{1}{2}\lambda_{dB}^{(n)}\cdot n, n=1,2,....$$

因此，粒子的动量，对应于德布罗意波长 $\lambda_{dB}^{(n)}$

$$p_n=\frac{h}{\lambda_{dB}^{(n)}}=\frac{hn}{2L}$$

相应能量为

$$E_n=\frac{p_n^2}{2m}=\frac{h^2n^2}{8mL^2}, n=1,2,3,.... \tag{1}$$

A.3(0.4分)

发射光子的能量

$$E=hc/\lambda$$

其中，c为光速，λ为光子波长。跃迁时的能量差 $\Delta E=E_2-E_1$，因此

$$\lambda_{21}=\frac{hc}{E_2-E_1}=\frac{8mcL^2}{3h}$$

A部分是关于光量子的基本概念题，只要对于辐射跃迁有基本了解，就可以做出来。

B部分　分子的光学性质(2.1分)

B.1(0.8分)

考虑到泡利不相容原理，每个能级E_n被自旋方向相反的两个电子占据。结果，10个电子填充最低的5个态，并且最长波长的光子的吸收对应于一个电子从被占据的跃迁E_5至未被占据的E_6能量状态的跃迁，即

$$\frac{hc}{\lambda}=E_6-E_5$$

其中，E_6和E_5可以通过公式(1)得到，其中m为电子质量m_e。因此，可以得到：

$$\lambda=\frac{c\cdot 8m_eL^2}{h(6^2-5^2)}=\frac{10.5^2\cdot 8}{11}\frac{m_ecl^2}{h}=\frac{882}{11}\frac{m_ecl^2}{h}\approx 647\text{ nm}$$

这一结果与Cy5吸收光谱峰位的实验值完全一致。

B.2(0.4分)

在Cy3分子的类似模型中，长度为$L=8.5l$的盒子中有8个电子，因此光子的吸收对应于$E_4\to E_5$跃迁。考虑到问题B1的结果，我们得到

$$\lambda_{Cy3}=\frac{8.5^2\cdot 8}{(5^2-4^2)}\frac{m_ecl^2}{h}\approx 518\text{ nm}$$

例如，Cy3分子的吸收光谱比Cy5分子的吸收光谱蓝移了$\Delta\lambda\approx 129$ nm。实验值为 $\lambda_{Cy3}^{(exp)}=548$ nm，

因此，我们的模型很好地捕捉到了这些染料分子的一般性质。

B.3(0.7分)

由题意，有

$$K = k\varepsilon_0^{\alpha} h^{\beta} \lambda^{\gamma} d^{\delta} \tag{2}$$

相关量的SI单位为：

$$[\varepsilon_0] = \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^3}, [h] = \frac{kg \cdot m^2}{s}, [\lambda] = m, [d] = A \cdot s \cdot m, [K] = s^{-1}$$

通过将这些表达式代入公式(2)，得到一个简单的关于未知量$\alpha,\beta,\gamma,\delta$的线性方程组

$$2\alpha + \delta = 0,\ -\alpha + \beta = 0,\ 4\alpha - \beta + \delta = -1,$$
$$-3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0$$

解得

$$\alpha = \beta = -1,\ \gamma = -3,\ \delta = 2$$

所以自发辐射的速率为：

$$K = \frac{16\pi^3}{3} \frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3}. \tag{3}$$

B.4(0.2分)

利用问题B.2的结果，并将跃迁偶极矩表示为$d = 2.4el$，我们从式(3)得到

$$\tau_{Cy5} = \frac{3}{16\pi^3} \frac{\varepsilon_0 h}{2.4^2 l^2 e^2} \lambda^3 \approx 3.3\text{ns}$$

B部分考察了分子的光学性质，从玻尔量子论的关系式，很容易得到辐射波长。由量纲分析可以得到自发辐射速率。

C部分　玻色-爱因斯坦凝聚(1.5分)

C.1(0.4分)

在温度T下，平均平动动能为$\frac{3}{2}k_B T$。将这个结果等于$p^2/(2m)$，因此，动量为

$$p = \sqrt{3mk_B T}$$

德布罗意波长为

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}。$$

C.2(0.5分)

每个粒子的体积V/N近似为ℓ^3，因此$\ell = n^{-1/3}$，其中$n = N/V$，而$\ell = \lambda_{dB}$，因此

$$T_c = h^2 n^{2/3} / (3mk_B)$$

C.3(0.6分)

使用前面问题的答案，有

$$n_c = (3mk_B T_c)^{3/2} / h^3$$

由理想气体的状态方程

$$n_0 = p/(k_B T)$$

代入数值，计算得到

$n_c \approx 1.59 \cdot 10^{18}\text{m}^{-3}$ 和 $n_0 / n_c \approx 1.5 \cdot 10^7$。

C部分考察了分子动理论和量子论，结合相关公式就能得到所求的结果。

D部分　三光束光学晶格(5.0分)

D.1(1.4分)

我们对三个电场(z分量)求和

$$E(\vec{r},t) = E_0 \sum_{i=1}^{3} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{4}$$

并将结果平方

$$E^2(\vec{r},t) = E_0^2 \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\cos(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega t)$$
$$= \frac{E_0^2}{2} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left\{ \cos\left[(\vec{k}_i - \vec{k}_j)\cdot\vec{r}\right] + \cos\left[(\vec{k}_i + \vec{k}_j)\cdot\vec{r} - 2\omega t\right] \right\} \tag{5}$$

时间平均给出

$$\left\langle E^2(\vec{r},t) \right\rangle = \frac{E_0^2}{2} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \cos\left[(\vec{k}_i - \vec{k}_j)\cdot\vec{r}\right], \tag{6}$$

简化为

$$\left\langle E^2(\vec{r},t) \right\rangle = E_0^2 \left(\frac{3}{2} + \sum_{j=1}^{3} \cos(\vec{b}_j \cdot \vec{r}) \right). \tag{7}$$

这里

$$\vec{b}_1 = \vec{k}_2 - \vec{k}_3,\ \vec{b}_2 = \vec{k}_3 - \vec{k}_1,\ \vec{b}_3 = \vec{k}_1 - \vec{k}_2,$$

或者用Levi-Civita符号 $\vec{b}_k = \varepsilon_{ijk}(\vec{k}_i - \vec{k}_j)$ 来表

示。顺便说一下，它们被称为倒易晶格矢量。

D.2(0.5分)

观察旋转60°将三个向量 $\vec{b}_{1,2,3}$ 映射成重新标记的 $-\vec{b}'s$ 的三元组。

D.3(1.2分)

我们发现

$$V(x,y)=-\alpha E_0^2\left\{\frac{3}{2}+\cos(ky\sqrt{3})+\cos\left(\frac{3kx}{2}+\frac{ky\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\left(\frac{3kx}{2}-\frac{ky\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \tag{8}$$

并推断

$$V_X(x)=-\alpha E_0^2\left\{\frac{5}{2}+2\cos\frac{3kx}{2}\right\}. \tag{9}$$

这个势有一个简单的余弦形式，原点在一个明显的极小值。它的最小值出现在 $\Delta x=4\pi/(3k)$ 的倍数处。在任意两个最小值之间的中点，例如在 $x=\Delta x/2=2\pi/(3k)$ 处，函数 $V_X(x)$ 具有最大值。

沿着 y 轴，有

$$V_Y(y)=-\alpha E_0^2\left\{\frac{3}{2}+\cos 2\varphi+2\cos\varphi\right\},\quad \varphi=\sqrt{3}ky/2. \tag{10}$$

寻找极值，我们发现

$$\sin 2\varphi+\sin\varphi=0. \tag{11}$$

- $\varphi=0$ (对应 y=0)是“深”最小值——晶格位置；
- $\varphi=\pi$ (对应 $y=\frac{2\pi}{\sqrt{3}k}$)是“浅”最小值(后来显示为 $V(x,y)$的鞍点)；
- $\varphi=2\pi/3$ 和 $\varphi=4\pi/3$ (对 应 $y=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}k}$ 和 $y=\frac{8\pi}{3\sqrt{3}k}$)为最大值。

D.4(0.8分)

回顾上一个问题中发现的最小值，并消除(0，$2\pi/3\sqrt{3}k$)处的鞍点。势能的实际最小值为：

- (0,0)在原点；
- (4π/(3k),0)，沿 x 轴正向最靠近原点。根据对称性，在相对于 x 轴的0°方向、60°方向、120°方向和180°方向上有六个等价的最近极小值。

最近极小值之间的距离(晶格常数)α = 4π/(3k). 假设激光波长是λ_{las} = 2π/k，得到α=δx= 2λ_{las}/3，因此α/λ_{las} = 2/3。

最 近 的 最 小 值 之 间 的 距 离 (晶 格 常 数) $\alpha=4\pi/(3k)$ 。 已 知 激 光 波 长 为 λ_{las}=2π/k，有 $\alpha=\Delta x=2\lambda_{las}/3$，因此 $\alpha/\lambda_{las}=2/3$ 。

D.5(1.1分)

原子的核心电子(除了提升到具有高主量子数 n 的状态的电子以外)屏蔽了原子核的电场，因此外层电子的有效电势类似于氢原子的电势。作用在电子上的吸引力为 $F=e^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$，产生了向心加速度 $a=v^2/r$ 。

由 $F=m_e a$，并使用角动量 $m_e vr=nh$ 的表达式

消掉速度，就可以找到与半径为r=λ_{las}的轨道相对应的量子数 n

$$n=\frac{e}{h}\sqrt{\frac{m_e\lambda}{4\pi\varepsilon_0}}\approx 85. \tag{12}$$

D1-D4部分的计算虽然看上去相对较难，不过从物理上来看，其实很简单，就是三束光叠加。对于计算得到的结果进行分析，就可以解出此题。D5利用电子绕原子核做圆周运动的简单模型，可以容易得到量子数。解题时根据题目的提醒，一步一步地操作即可。