



磁悬浮

——2021年亚洲物理奥赛理论第三题解答

张康 宋峰

(南开大学物理科学学院 300071)

A部分:磁单极子的突然出现:薄膜中的初始响应和随后的时间演变

初始反应

A.1 如图1所示,在 $z \geq 0$ 区域,不包括单极子占据的点,在 $t=t_0=0$ 时的磁场为感应电流产生的磁场 \vec{B} 和单极子 q_m 产生的磁场 \vec{B}_{mp} 之向量和,即 $\vec{B} = \vec{B} + \vec{B}_{mp}$

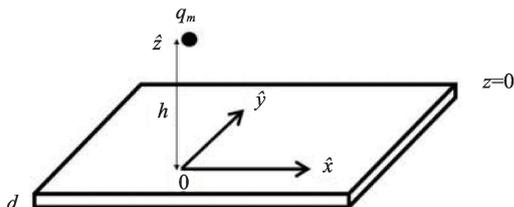


图1 单极子 q_m 出现在距离厚度为 d 的导电薄膜的距离 h 处。坐标的原点位于上表面

$$\text{根据题给公式: } \vec{B}_{mp} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (\text{A-1})$$

其中 μ_0 是真空磁导率, \vec{r} 是从 q_m 到观测点(或场点)的位移向量, \hat{r} 是单位向量:

$$\hat{r} = \vec{r}/r \quad (\text{A-2})$$

单极子到任意位置 $P(x,y,z)$ 处的位移为:

$$\vec{r} = (z-h)\hat{z} + \vec{\rho} \quad (\text{A-3})$$

$$\text{其大小为: } r = \sqrt{(z-h)^2 + \rho^2} \quad (\text{A-4})$$

式中, h 为 q_m 到 xoy 面的距离, $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\hat{\rho}$ 表示平面内的位移矢量。

将式(A-3)、(A-4)代入式(A-2)可得,

$$\hat{r} = \frac{(z-h)\hat{z} + \vec{\rho}}{[(z-h)^2 + \rho^2]^{1/2}} \quad (\text{A-5})$$

将式(A-5)代入式(A-1)中可得:

$$\vec{B}_{mp} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{(z-h)\hat{z} + \vec{\rho}}{[(z-h)^2 + \rho^2]^{3/2}} \quad (\text{A-6})$$

同理可得由感应电流产生的磁场为:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{(z+h)\hat{z} + \vec{\rho}}{[(z+h)^2 + \rho^2]^{3/2}} \quad (\text{A-7})$$

因此在 $z \geq 0$ 区域的初始总磁场为:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \left[\frac{(z-h)\hat{z} + \vec{\rho}}{[(z-h)^2 + \rho^2]^{3/2}} + \frac{(z+h)\hat{z} + \vec{\rho}}{[(z+h)^2 + \rho^2]^{3/2}} \right] \quad (\text{A-8})$$

A.2 在 $z \leq -d$ 区域,在 $t=t_0=0$ 时,总磁场为

$$\vec{B} = 0. \quad (\text{A-9})$$

A.3 由式(A-8)可知,对于所有的 ρ ,在 $z=0$ 时, $B_z = 0$ 。

因此,在 $z=0$ 时,总磁通量 $\Phi_B = 0$ 。 (A-10)

由式(A-9)可知,在 $z=-d$ 时, $B_z = 0$ 。

因此,在 $z=-d$,总磁通量 $\Phi_B = 0$ 。 (A-11)

A.4 在导电薄膜上下方考虑如图2所示的路径,应用安培环路定理,并使用 $d \ll h$ 近似,有

$$B_\rho(\rho, z=0)d\rho = \mu_0 j(\rho)d\rho \cdot d, \quad (\text{A-12})$$

其中 $B_\rho d$ 项由于 d/h 因子导致贡献太小可以被忽略。

感应电流密度由下式给出:

$$\vec{j}(\vec{\rho}) = \frac{1}{\mu_0 d} \hat{z} \times \vec{B}(\vec{\rho}, z=0) = \frac{q_m}{2\pi d} \frac{\hat{z} \times \vec{\rho}}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (\text{A-13})$$

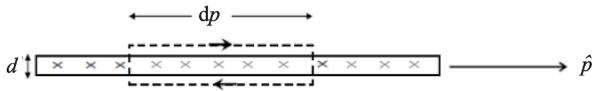


图2 选取导电薄膜上下方的路径应用安培环路定理

随后的反应

A.5

题目中给出薄膜内感应电流产生的 B_z' 方程为: 首先可以利用减法代替求二阶偏导, 因此有

$$\frac{\partial^2 B_z'}{\partial z^2} = \frac{\left(\frac{\partial B_z'}{\partial z} \Big|_z - \frac{\partial B_z'}{\partial z} \Big|_{-d-z} \right)}{d+2z} \quad (\text{A-14})$$

由于 B_z' 是 $z'=z+d/2$ 的偶函数, 因此有

$$\frac{\partial B_z'}{\partial z} \Big|_z = -\frac{\partial B_z'}{\partial z} \Big|_{-d-z}, \text{ 考虑到 } |z| \ll d, \text{ 因此有 } d+2z \approx d$$

故等式(A-14)可以进一步化简为如下形式

$$\frac{\partial B_z'}{\partial z} \Big|_z - \frac{\partial B_z'}{\partial z} \Big|_{-d-z} = \frac{2}{d} \frac{\partial B_z'}{\partial z} \quad (\text{A-15})$$

根据题给公式(2), 可以得到如下关系

$$\frac{2}{d} \frac{\partial B_z'}{\partial z} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B_z'}{\partial t} \quad (\text{A-16})$$

(A-16)左侧变为 $2 \frac{\partial}{\partial z} B_z'(\rho, z; t)$ 。等式右侧可以

由 $B_z'(\rho, z; t)$ 表示。结合上述分析, 可以得到如下关系式:

$$2 \frac{\partial}{\partial z} B_z'(\rho, z; t) = \mu_0 \sigma d \frac{\partial}{\partial t} B_z'(\rho, z; t) \quad (\text{A-17})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} B_z'(\rho, z; t) = v_0 \frac{\partial}{\partial z} B_z'(\rho, z; t). \quad (\text{A-18})$$

其中, $Z \approx 0, v_0 = \frac{1}{2\mu_0 \sigma d}$

A.6 对于 A.5 中的方程式(A-18), 在 $z \approx 0$ 时, 具有以下形式的解:

$$B_z'(\rho, z; t) = f(\rho, z + v_0 t), \quad (\text{A-19})$$

A.7 根据 A.1 的计算结果可知, 在 $z \geq 0$ 区域, 当 $t=0$ 时, 感应电流产生的磁场

$$B_z'(\rho, z \geq 0) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{(z+h)}{[(z+h)^2 + \rho^2]^{3/2}},$$

$$B_z'(\rho, z \geq 0) = F(\rho, z+h). \quad (\text{A-20})$$

当 $t > 0$ 时, 根据式(A-19),

对于 $B_z'(\rho, z; t=0)$, 可将 z 进行替换, 即:

$$z \rightarrow z + v_0 t, \quad (\text{A-21})$$

也就是, $B_z'(\rho, z \approx 0; t) = F(\rho, z + v_0 t + h)$.

对应于运动镜像单极子的物理图象, 其位置为:

$$z_{mp} = -h - v_0 t. \quad (\text{A-22})$$

最终结果为: $v_0 = 2/(\mu_0 \sigma d)$. (A-23)

B 部分 作用在点状磁偶极子上的磁力在恒定的高度 h 以恒定的速度运动 移动的单极子

B.1 所有 q_m 型图像磁单极子的当前位置在

$$(x, z) = [-nv\tau, -h - nv_0\tau], n \geq 0. \quad (\text{B-1})$$

所有 $-q_m$ 镜像磁单极子的位置在:

$$(x, z) = [-(n+1)v\tau, -h - nv_0\tau], n \geq 0. \quad (\text{B-2})$$

B.2 由于所有镜像磁单极子在 $t=0$ 时的磁势 $\Phi_+(x, z)$ 以求和形式给出:

$$\begin{aligned} \Phi_+(x, z) &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+nv\tau)^2 + (z+h+nv_0\tau)^2}} \\ &\quad - \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+(n+1)v\tau)^2 + (z+h+nv_0\tau)^2}}; \\ &\Rightarrow \Phi_+(x, z) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x+nv\tau)^2 + (z+h+nv_0\tau)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+(n+1)v\tau)^2 + (z+h+nv_0\tau)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

将求和改成积分:

$$\begin{aligned} \Phi_+(x, z) &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi\tau} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x+vt')^2 + (z+h+v_0t')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+(t'+\tau)v)^2 + (z+h+v_0\tau)^2}} \right] dt', \\ &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi\tau} \int_0^{\infty} \frac{(x+vt')v\tau}{[(x+vt')^2 + (z+h+v_0\tau)^2]^{3/2}} dt', \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

计算得到:

$$\Phi_+(x,z) = \frac{\mu_0 q_m v}{4\pi} \frac{1}{(z+h)v - v_0 x} \left[\frac{z+h}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} - \frac{v_0}{\sqrt{v^2 + v_0^2}} \right] \quad (\text{B-6})$$

移动的偶极子

B.3 总磁势

$$\Phi_T(x,z) = \Phi_+(x,z) + \Phi_-(x,z), \quad (\text{B-7})$$

其中 $\Phi_-(x,z) = -\Phi_+(x,z - \delta_m)$.

$$\begin{aligned} \Phi_T(x,z) &= \Phi_+(x,z) - \Phi_+(x,z - \delta_m) \\ &= \delta_m \times \partial \Phi_+(x,z) / \partial z. \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

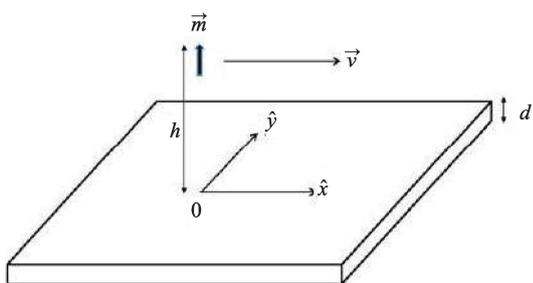


图3

$$\begin{aligned} \Phi_T(x,z) &= -\frac{\mu_0 m v}{4\pi} \left[\frac{v}{[(z+h)v - v_0 x]^2} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{z+h}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} - \frac{v_0}{\sqrt{v^2 + v_0^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^2}{[(z+h)v - v_0 x][x^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

作用在点状磁偶极子上的力:

$$F_z = -q_m \frac{d}{dz} \Phi_T(0,z) \Big|_{z=h} + q_m \frac{d}{dz} \Phi_T(0,z) \Big|_{z=h-\delta_m} \quad (\text{B-10})$$

$$F_z = -\frac{\mu_0 m q_m}{2\pi} \left[1 - \frac{v_0}{\sqrt{v^2 + v_0^2}} \right] \left[\frac{1}{(2h)^3} - \frac{1}{(2h - \delta_m)^3} \right]. \quad (\text{B-11})$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{3\mu_0 m^2}{32\pi h^4} \left[1 - \frac{v_0}{\sqrt{v^2 + v_0^2}} \right]. \quad (\text{B-12})$$

$$F_x = -q_m \frac{d}{dx} \Phi_T(x,h) \Big|_{x=0} + q_m \frac{d}{dx} \Phi_T(x,h - \delta_m) \Big|_{x=0} \quad (\text{B-13})$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{3\mu_0 m^2 v_0}{32\pi h^4 v} \left[1 - \frac{v_0}{\sqrt{v^2 + v_0^2}} \right] \quad (\text{B-14})$$

v_0 和 v 之间的关系及其联系

B.4

$$v_0 = \frac{2}{\mu_0 \sigma d} = \frac{2}{4\pi \times 10^{-7} \times 5.9 \times 10^7 \times 0.5 \times 10^{-2}} = 5.4 \text{ m/s}. \quad (\text{B-15})$$

B.5 在小 v 状态下, 意味着 v 小于系统的某个典型速度 (或在下一个任务 B.6 中考虑的临界速度 v_c), 具有基本类似于 $v \approx 0$ 的特征. 对于 $v \approx 0$, 频率 ω 与 v_0/h 相关联. 利用 B.4 中给出的参数, 趋肤深度 (问题列表中的方程(3)) δ 由下式给出:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} = \sqrt{\frac{2h}{v_0 \mu_0 \sigma}} = 1.58 \text{ cm}, \text{ 是 } d \text{ 的三倍}$$

以上

因此, 在小 v 状态下, 有

$$v_0(v) = v_0. \quad (\text{B-16})$$

在大 v 状态下, 有趋肤深度 $\delta < d$, 从而影响薄膜厚度 d_{eff}

$$d_{\text{eff}} = \delta, \quad (\text{B-17})$$

其中场可看作是均匀的 (即 z 独立).

$$\text{在这种情况下, } \omega = v/h, \quad (\text{B-18})$$

所以

$$v_0(v) = \frac{2}{\mu_0 \sigma \delta} = \frac{2}{\mu_0 \sigma} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma}} \frac{v}{h} = \sqrt{\frac{d}{h}} v v_0,$$

或者

$$v_0(v) = v_0 \sqrt{\frac{d}{h}} \sqrt{\frac{v}{v_0}}. \quad (\text{B-19})$$

B.6 临界速度 v_c 由条件 $\delta = d$ 确定:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma v_c / h}} \Rightarrow v_c = \frac{2h}{d^2 \mu_0 \sigma} = v_0 \frac{h}{d}. \quad (\text{B-20})$$

C 部分 导电薄膜超导时磁偶极子的运动

当电导率 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, 后退速度 $v_0 \rightarrow 0$, 这样就不会出现一整串镜像磁单极子. 相反, 该镜像只是一个镜像磁偶极子瞬时位置的图像. 在这种情况下, 镜像磁偶极子是 $\vec{m} = m\hat{x}$ 位于位置 $(x, y, z) = (0, 0, -h)$. 然后, 从图像配置的对称性可以清楚地看出, 镜像中磁偶极子上的力仅沿 z 对齐. 为方便起见, 将磁单极子 $-q_m$ 定位在 $x=0$ 处, 而对于磁单极子 q_m , 定位在 $x = \delta_m$.

C.1

来自镜像磁偶极子的总磁势 $\Phi_T(x,z)$ 为:

$$\Phi_T(x,z) = -\frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} + \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-\delta_m)^2 + (z+h)^2}} \quad (\text{C-1})$$

方法一:

镜像磁偶极子作用在磁偶极子上的总垂直力

F'_z 由下式给出:

$$F'_z = (-q_m) \left[-\frac{\partial}{\partial z} \Phi_T \right]_{x=0, z=h} + q_m \left[-\frac{\partial}{\partial z} \Phi_T \right]_{x=\delta_m, z=h} \quad (\text{C-2})$$

$$F'_z = \frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi} \frac{z+h}{[x^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \Bigg|_{x=0, z=h} - \frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi} \frac{z+h}{[(x-\delta_m)^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \Bigg|_{x=0, z=h} - \frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi} \frac{z+h}{[x^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \Bigg|_{x=\delta_m, z=h} + \frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi} \frac{z+h}{[(x-\delta_m)^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \Bigg|_{x=\delta_m, z=h},$$

$$F'_z = 2 \frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi} \left(\frac{1}{2h} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\delta}{2h} \right)^2 \right)^{3/2}} \right] \quad (\text{C-3})$$

$$F'_z = \frac{3\mu_0 m^2}{64\pi h^4} \quad (\text{C-4})$$

平衡条件:

$$F'_z - M_0 g = 0, \quad (\text{C-5})$$

$$\Rightarrow \frac{3\mu_0 m^2}{64\pi h^4} = M_0 g,$$

$$\Rightarrow h_0 = \left[\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi M_0 g} \right]^{1/4} \quad (\text{C-6})$$

方法2:

可以使用直接力计算。

$$F'_z = 2 \frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{2h} \right)^2 - \frac{2h}{(\delta_m^2 + (2h)^2)^{3/2}} \right] \quad (\text{C-7})$$

$$= \frac{\mu_0 q_m^2}{2\pi} \left(\frac{1}{2h} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\delta}{2h} \right)^2 \right)^{3/2}} \right] \quad (\text{C-8})$$

$$= \frac{3\mu_0 m^2}{64\pi h^4}$$

平衡条件 $F'_z - M_0 g = 0$ 给出了与(C-6)方程式中相同的平衡位置 h_0 。

$$h_0 = \left[\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi M_0 g} \right]^{1/4}$$

C.2

关于平衡的振荡频率由下式得到

$$F'_z \approx M_0 + \frac{dF'_z}{dz} \Delta z, \quad (\text{C-9})$$

其中 $\Delta z = z - h_0$ 。

$$\text{并且从 } \frac{dF'_z}{dz} = -k = -M_0 \Omega^2 \text{ 中} \quad (\text{C-10})$$

可以得到

$$k = -\frac{d}{dz} \frac{3\mu_0 m^2}{64\pi h^4} = \frac{3\mu_0 m^2}{16\pi h_0^5} = \frac{4}{h_0} \frac{3\mu_0 m^2}{64\pi h_0^4} = \frac{4M_0 g}{h_0} = M_0 \Omega^2 \quad (\text{C-11})$$

由此可以解得角振荡频率

$$\Omega = \sqrt{\frac{4g}{h_0}} \quad (\text{C-12})$$

C.3

$$h_0 = \left[\frac{3\mu_0 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 M \right)^2}{64\pi \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g \right)} \right]^{1/4} = \left[\frac{R^3 M^2 \mu_0}{16\rho_0 g} \right]^{1/4} \quad (\text{C-13})$$

$$h_0 = \left[\frac{10^{-18} \times 75^2 \times 10^{-4}}{16 \times 7400 \times 9.8 \times \mu_0} \right]^{1/4} \text{ m} = 25 \text{ } \mu\text{m}. \quad (\text{C-14})$$

C.4

$$\Omega = \sqrt{\frac{4g}{h_0}} = \sqrt{\frac{4 \times 9.8}{30 \times 10^{-6}}} \text{ s}^{-1} = 1.3 \text{ kHz}. \quad (\text{C-15})$$