



# 行星物理中的问题

## ——2021年国际物理奥赛理论第一题解答

马玉林<sup>1</sup> 熊志松<sup>1</sup> 宋峰<sup>2</sup>

(1. 深圳中学 518001; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

本文针对2021年国际物理奥林匹克竞赛理论第一题,参考官方提供的答案,予以解答。该题以行星内部结构为背景,涉及力学方面的内容。对数学运算有一定要求。

### A 部分解答:大洋中脊(5.0分)

#### A.1 (0.6分)

设 $h'$ 是油柱的高度(见图1)。那么在水面以下深度 $h$ 的压强为

$$p_h = \rho_0 gh = \rho_{oil} gh'$$

式中, $\rho_0$ 、 $\rho_{oil}$ 分别为水和油的密度, $g$ 为重力加速度。

可得到: $h' = \frac{\rho_0}{\rho_{oil}} h$ 。

板上的水平力  $F_x = F_1 - F_0$ ,

其中,新流体产生的力为  $F_1 = \frac{\rho_{oil} gh'}{2} \cdot h'w$ ,水产生的力为  $F_0 = \frac{\rho_0 gh}{2} \cdot hw$ 。

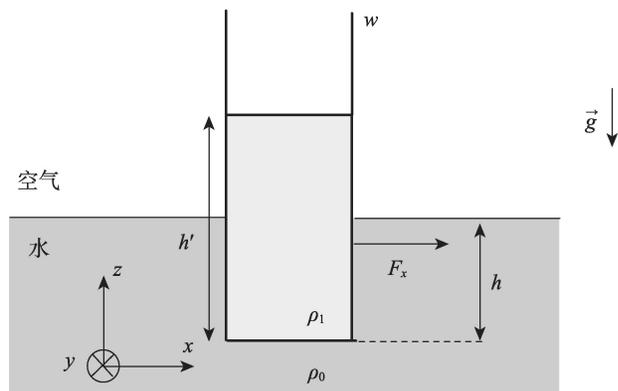


图1

式中 $w$ 为沿 $y$ 轴的板块宽度。

结合以上各式,得到

$$F_x = \left( \frac{\rho_0}{\rho_{oil}} - 1 \right) \frac{\rho_0 gh^2 w}{2} \quad (1)$$

该力作用在右侧板的右侧上。

本问是一道基本的液体受力分析题,利用底部液体压强相同,得到油和水压强的关系,再分析液体在竖直面的压力即可。

#### A.2 (0.6分)

考虑地壳的矩形质量元素。

由题给条件: $l(T) = l_1 [1 - k_l (T_1 - T) / (T_1 - T_0)]$

其中 $l$ 是一块地壳材料的长度, $l_1$ 是它在温度 $T_1$ 下的长度, $k_l$ 是重新标定后的热膨胀系数,可以假定为常数。 $T_0$ 为地壳的温度。

对所考察的地壳,该条件对其三个维度都成立,所以可以得到该地壳的体积 $V$ 为

$$V = V_1 \left( 1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^3 \quad (2)$$

$V_1$ 是温度为 $T_1$ 时的体积。如果该块地壳的质量是 $m$ ,那么密度是

$$\rho(T) = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_1} \left( 1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^{-3} = \rho_1 \left( 1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^{-3} \quad (3)$$

因为 $k_l \ll 1$ ,可以得到近似式

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left( 1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right) \quad (4)$$

故 $k=3k_l$ 。

本题使用小量近似的数学知识,把一维限度转换成三维体积,忽略二阶小量后即可得到答案,以上两问比较简单,是后面几个问题的基础。

### A.3 (1.1分)

由于地幔可视为流体,满足流体静力平衡条件,所以在 $z=h+D$ 处的压强 $p(x, z)$ 对于所有的 $x$ 必须相同,即

$$p(0, h+D) = p(\infty, h+D) \quad (5)$$

$D$ 为远距离的地壳厚度。

同理,对于水,

$$p(0, 0) = p(\infty, 0) \quad (6)$$

因此, $z=0$ 和 $z=\infty$ 之间的压强变化在 $x=0$ 和 $x=\infty$ 处必须相同。

在脊轴上

$$p(0, h+D) - p(0, 0) = \rho_1 g(h+D) \quad (7)$$

在很远处,

$$p(\infty, h+D) - p(\infty, 0) = \rho_0 g h + \int_h^{h+D} \rho(T(\infty, z)) g dz \quad (8)$$

在远离地壳上升的地方(如题中的山脊轴),由于地壳的两表面几乎是水平的,我们可以应用热传导定律来描述热量在这些区域中的传递,由题述可知,热传导系数不变,则温度梯度为定值。即

$$\frac{dT}{dz} = \text{const} \quad (9)$$

由于 $x=\infty$ 处的地壳温度与高度线性相关,因此在应用温度边界条件后,

$$T(\infty, z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z-h}{D} \quad (10)$$

从上面的所有方程,以及A.2问得到的密度公式,利用地壳上下表面的压强关系,有

$$\begin{aligned} \rho_1 g(h+D) &= \rho_0 g h \\ &+ \int_h^{h+D} \rho_1 \left( 1 + k \frac{T_1 - T_0 - (T_1 - T_0) \frac{z-h}{D}}{T_1 - T_0} \right) g dz \end{aligned} \quad (11)$$

由此得到

$$D = \frac{2}{k} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) h \quad (12)$$

本问关键在于利用海水和地幔液体的性质,结合热传导定律,得到地幔的厚度,本问需要同时考虑地壳的热学和力学性质,对综合分析能力是一个考验。

### A.4 (1.6分)

本问可以利用A.1的思路,考虑到液体往各个方向压强相同,半脊上的净水平力是作用在 $x=0$ 和 $x=\infty$ 处沿轴向上的压力差:

$$F = L \int_0^{h+D} p(0, z) dz - L \int_0^h p(\infty, z) dz \quad (13)$$

从上一问题的考虑来看, $x=0$ 处的压强全部由地幔的压强提供,即

$$p(0, z) = p(0, 0) + \rho_1 g z \quad (14)$$

在很远处

$$p(\infty, z) = \begin{cases} p(\infty, 0) + \rho_0 g z, & \text{若 } 0 \leq z \leq h \\ p(\infty, 0) + \rho_0 g h + \int_h^z \rho_1 \left( 1 + k \frac{T_1 - T_0 - (T_1 - T_0) \frac{z'-h}{D}}{T_1 - T_0} \right) g dz', & \text{若 } h \leq z \leq h+D \end{cases} \quad (15)$$

上面的方程可以组合成

$$\begin{aligned} F &= L \int_0^{h+D} (p(0, 0) + \rho_1 g z) dz - L \int_0^h (p(\infty, 0) + \rho_0 g z) dz \\ &- L \int_0^{h+D} (p(\infty, 0) + \rho_0 g h) dz \\ &- L \int_0^{h+D} \left[ \int_h^z \rho_1 \left( 1 + k \left( 1 - \frac{z'-h}{D} \right) \right) g dz' \right] dz \end{aligned} \quad (16)$$

使用 $p(0, 0) = p(\infty, 0)$ 约去常数项后,对上式进行积分,有

$$\begin{aligned} \int_0^{h+D} (\rho_1 g z) dz &= \rho_1 g \frac{(h+D)^2}{2} \\ \int_0^h \rho_0 g z dz &= \rho_0 g \frac{h^2}{2} \\ \int_h^{h+D} \rho_0 g h dz &= \rho_0 g h(h+D) \\ \int_0^{h+D} \left[ \int_h^z \rho_1 \left( 1 + k \left( 1 - \frac{z'-h}{D} \right) \right) g dz' \right] dz &= \rho_1 g \left( \frac{D^2}{2} + \frac{kD^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

因此,

$$F = gL \left[ \rho_1 g \left( \frac{h^2}{2} + hD - \frac{kD^2}{3} \right) - \rho_0 g \left( \frac{h^2}{2} + hD \right) \right] \quad (18)$$

利用A.3的结果: $D = \frac{2}{k} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) h$ ,代入上式

得到

$$F = gLh^2(\rho_1 - \rho_0) \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3k} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \right) \quad (19)$$

由于  $k \ll 1$ , 具有  $\propto k^{-1}$  的项排在首位, 因此,

$$F \approx \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{k^2 \rho_1} \quad (20)$$

本问思路不难想到, 利用 A.1 问的方法, 注意到液体压强处处相等, 可以沿着竖直线计算液体压强来得到地壳两侧曲线水平方向上的压强, 积分即可得到结果。

值得注意的是, 本题的模型需要考虑到地壳侧面的压强, 在地壳侧面, 即地壳的边缘或边界地区, 由于板块运动、地震活动、地壳变形等因素, 会产生复杂的应力分布。这些应力会导致地壳侧面受到压强的作用。原则上地壳侧面的压强分布是不均匀的, 并且会受到多种因素的影响, 不便计算。本题采取了简化模型, 直接按照液体的方式对这个压强进行计算, 不失为一个不错的近似。题目中要是多给些描述就会更加方便学生作答了。

### A.5 (0.9分)

方法一: 量纲分析。预计时间尺度  $\tau$  仅取决于地壳的密度  $\rho_1$ 、比热  $c$ 、热导率  $\kappa$  和厚度  $D$ 。因此, 我们可以得到

$$\tau = A \rho_1^\alpha c^\beta \kappa^\gamma D^\delta \quad (21)$$

其中  $A$  是一个无量纲常数。可通过量纲分析获得指数  $\alpha$ - $\delta$ 。定义不同尺寸的符号:  $L$  代表长度,  $M$  代表质量,  $T$  代表时间,  $\Theta$  代表温度。那么  $\tau$ 、 $\rho_1$ 、 $c$ 、 $\kappa$ 、 $D$  的量纲分别为  $T$ 、 $M \cdot L^{-3}$ 、 $\sim L^2 \cdot T^{-2} \cdot \Theta^{-1}$ 、 $MLT^{-3} \cdot \Theta^{-1}$ 、 $L$ 。将它们代入式(18), 可得到一组方程

$$\begin{cases} 0 = -3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta \\ 0 = \alpha + \gamma \\ 1 = -2\beta - 3\gamma \\ 0 = -\beta - \gamma \end{cases} \quad (22)$$

解得:  $\alpha = \beta = 1, \gamma = -1, \delta = 2$ , 因此

$$\tau = A \frac{c \rho_1 D^2}{\kappa} \quad (23)$$

方法二: 数量级分析。考虑一块面积为  $S$  的地

壳。通过粗糙地壳传递的热通量为  $Q \sim c \rho_1 S D \Delta T$ , 其中  $\Delta T = T_1 - T_0$ 。

另一方面, 热导率定律给出  $\kappa \frac{\Delta T}{D} \sim \frac{Q}{S \tau}$ 。

由这两个关系式,  $c \rho_1 S D \Delta T \sim S \tau \kappa \frac{\Delta T}{D}$ ,

得到  $\tau$  与  $\Delta T$  无关, 并且

$$\tau \sim \frac{c \rho_1 D^2}{\kappa} \quad (24)$$

本问要求使用量纲分析估算特征时间, 量纲分析的问题最重要的是能够把握问题和哪些物理量有关, 确定好物理量及物理量的量纲之后, 联立方程求解即可, 量纲法被广泛使用在物理规律尚不明确的情况下进行估计, 当然, 也可以在已知物理规律的作用下进行数量级分析。

## A 部分评述

本部分题目利用海洋中脊来讨论地壳物理性质, 比如密度、厚度、温度差、受力等等。A.1 和 A.2 对液体受力和密度随温度变化给出简单讨论, A.3 和 A.4 分别要求我们从热学原理、力学原理出发探究地壳的性质, 具体计算时注意利用海洋中脊和远处地壳两个特征的温度边界条件, 同时考虑地壳的力学和热学性质, 利用液体压强各向同性的性质, 考虑压强随着  $x$  的变化关系, 进行积分求解即可。值得注意的是 A.4 需要合理考虑地壳侧面的压强, A.5 需使用量纲分析, 估计出所需时间与哪些物理量有关, 利用量纲法求解即可。总体而言这是一道考验基本功和建模能力的题目。

## B 部分解答: 分层介质中的地震波 (5.0分)

### B.1 (1.5分)

该问题中的地震波可以用射线理论来处理。即, 它们的传播由斯涅尔折射定律描述

$$n(0) \sin \theta_0 = n(z) \sin \theta \quad (25)$$

折射率满足

$$n(z) = \frac{c}{v(z)} = \frac{c}{v_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right)} \quad (26)$$

$c$ 表示折射率为 $n=1$ 的材料中的地震波速。从上面两个方程得到

$$v_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right) \sin \theta_0 = v_0 \sin \theta \quad (27)$$

方法一：对于所描述的圆弧，有 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ， $z = R - R \sin \theta_0$ 。如图2，有

$$\left(1 + \frac{R - R \sin \theta_0}{z_0}\right) \sin \theta_0 = 1 \quad (28)$$

圆半径为 $R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}$ ，由几何关系得到

$$x_1(\theta_0) = 2R \cos \theta_0 \quad (29)$$

例如 $A = 2z_0$ 且 $b=1$ ，于是有

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0 \quad (30)$$

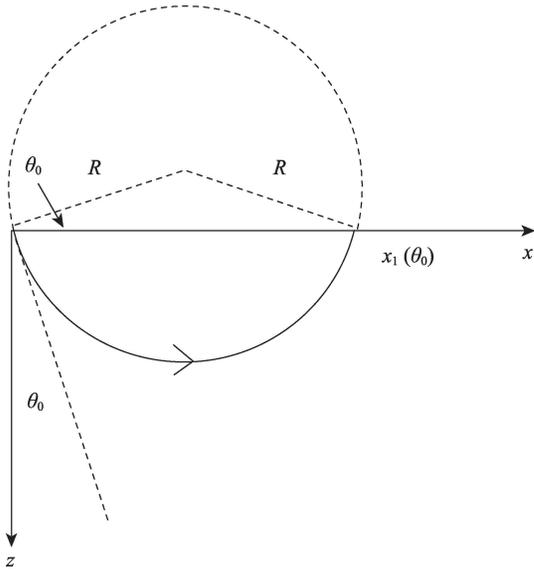


图2

方法二：将 $v_0 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right) \sin \theta_0 = v_0 \sin \theta$ 微分得到

$$\frac{dz}{z_0} \sin \theta_0 = \cos \theta d\theta \quad (31)$$

无限小的射线路径长度 $dl$ 与垂直坐标的变化有关

$$dz = dl \cos \theta \quad (32)$$

得到

$$dl = \frac{z_0}{\sin \theta_0} d\theta \quad (33)$$

这是一个半径为 $R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}$ 的圆弧的方程。

或者，不考虑无穷小的射线路径长度 $dl$ ，可以通过

$$\cot \theta = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \quad (34)$$

一阶导数可以通过斯涅耳定律消除，得到

$$\cot \theta = \frac{z_0 \cos \theta}{\sin \theta_0} \frac{d\theta}{dx} \quad (35)$$

可以整合得到

$$x_1 = -\frac{z_0}{\sin \theta_0} \int_{\text{start}}^{\text{end}} d \cos \theta = \frac{2z_0 \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \quad (36)$$

再次使用斯涅耳定律得到射线在到达表面的点处满足 $\cos \theta = -\cos \theta_0$ 。

本问类比光线和声波的传播，利用速度公式和折射定律求解即可。

## B.2 (1.5分)

在二维情况下， $\frac{E}{\pi} d\theta_0$ 是在区间 $[\theta_0, \theta_0 + d\theta_0)$ 内发射的射线所携带的能量。

另一方面，到达 $[x, x + dx)$ 的光线所携带的能量是 $\varepsilon dx$ 。所以，

$$\varepsilon = \frac{E}{\pi} \left| \frac{d\theta_0}{dx} \right| \quad (37)$$

使用B.1的结论： $x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0$ ，有

$$\frac{dx}{d\theta_0} = -\frac{Ab}{\sin^2(b\theta_0)} = -Ab(1 + \cot^2(b\theta_0)) = -\frac{b(A^2 + x^2)}{A} \quad (38)$$

因此

$$\varepsilon(x) = \frac{EA}{\pi b(A^2 + x^2)} = \frac{2Ez_0}{\pi(4z_0^2 + x^2)} \quad (39)$$

如图3所示

本问要求能量密度，我们可以利用波源均匀发射的特性，得到能量随着角度 $\theta_0$ 的变化关系，再利用 $x$ 和 $\theta_0$ 的函数关系微分求解即可。

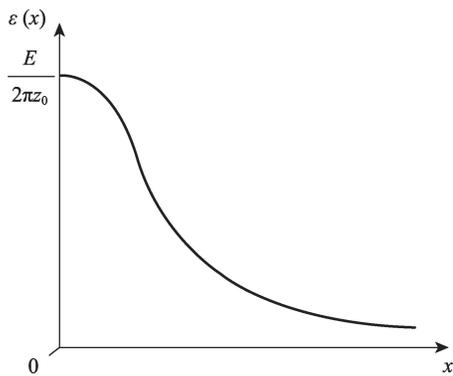


图3

### B.3 (2.0分)

定义  $x_- = x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right)$  和  $x_+ = x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right)$ , 考虑  $\delta\theta_0$  的 0 阶项,  $x_- \approx x_+ \approx x_1(\theta_0)$ 。随着信号的每次反射, 信号边缘反射点之间的水平距离增加  $|x_+ - x_-| = x_- - x_+$ 。

当沿着  $x$  轴正向移动时, 这些区域会变宽, 直到它们重叠。如果这种情况发生在  $N$  次反射后, 那么

$$N \approx \frac{x_1(\theta_0)}{x_- - x_+} \quad (40)$$

其中近似符号表明趋向于  $\delta\theta_0 \rightarrow 0$ 。

区域开始重叠的位置是  $x_{\max} = Nx_1(\theta_0)$ 。所以,

$$x_{\max} = \frac{x_1(\theta_0)^2}{x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right) - x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right)} \quad (41)$$

因为  $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ , 可以估算得到

$$\begin{aligned} x_1\left(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}\right) - x_1\left(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}\right) &\approx -\frac{dx_1(\theta_0)}{d\theta_0} \delta\theta_0 \\ &= \frac{Ab}{\sin^2(b\theta_0)} \delta\theta_0 \end{aligned} \quad (42)$$

结合最后两个方程并代入  $x_1(\theta_0)$  表达式,

$$x_{\max} = \frac{A \cos^2(b\theta_0)}{b\delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2\theta_0}{\delta\theta_0} \quad (44)$$

## B 部分评述

本部分考验有关地震波的相关知识。第一问

考验最远的探测距离, 可以完全类比光的折射定律进行求解, 第二问考验不同位置测到的地震能量密度, 利用角度与  $x$  的关系即可求解, 第三问同样, 只不过变成了主动发射的波, 首先理解到波重叠时将无法测量信号, 然后利用小角与  $x$  方向上的小量的关系即可求解。

## 赛题背景

行星科学是天文学分支学科, 主要研究行星及其卫星、矮行星、小行星、彗星、流星群等太阳系小天体性质、构造、运动过程及其起源和演化, 同时搜寻太阳系外行星系统并研究其特征。

地球类似于一个桃子, 内部分为地核、地幔和地壳三部分。不同的层由不连续断面分割开, 地核的厚度约为 3400 千米, 地幔约为 2800 千米, 地壳最薄, 大约为 17 千米。不同位置处地壳的厚度不同, 海洋处较薄, 大洲下较厚。本题 A 部分正是从大洋中脊出发基于这个方向的研究。地震波的传播对于地震的预测和预警具有重要意义。当地震发生时, 地震波会从震源向四周传播, 地震监测站通过接收地震波的信号来确定地震的发生时间、地点和规模, 进而发布地震预警信息。本题 B 部分讨论了地震传播和预警的相关问题。这些问题帮助我们了解我们居住的星球, 同时又和我们的生活息息相关。

