美国各大学 1982 年在华招收物理研究生试题及答案(三)

试题部分普通物理(四小时)
(下列 8 试题选解 6 题)

C1. N 个点粒子的经典气体，总质量为 m，占据体积 V，并处于温度 T 的热力学平衡. 粒子以成对的形式经由“硬球”势彼此相互作用，

$$V(r_{ij})=\begin{cases}+\infty & r_{ij}<a\\ 0 & r_{ij}>a\end{cases}$$

式中 r_{ij} 是粒子 i 和 j 之间的距离. 令 $n=\frac{N}{V}$ 为数密度，K 为玻兹曼常数，P 为压力，C_V 为(每粒子)定容比热.

计算作为 T、n 和普适常数的函数 C_V 和二级导数 $\left.\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right]_n$. 详细地列出理由.

C2. 令 I_1、I_2、I_3 为(相对于质心的)刚体的主转动惯量. 假设它们各不相同，且 $I_1>I_2>I_3$，如果在自由空间中使物体绕一根主轴旋转，它将继续绕着该轴旋转. 但是，我们关心稳定性，如果初始的自旋轴非常接近但不精确地和主轴一致会发生什么，稳定性意味着自旋轴永远不远离该主轴.

人们发现对应于最大和最小的转动惯量 I_1 和 I_3 的主轴，这种运动事实上是稳定的，试应用欧拉方程，解析地解释这一点.

C3. 一个电子(质量 m，电荷 e)在垂直于均匀磁场的平面内运动. 如果忽略辐射损失的能量，则轨道是一个圆，半径为 R. 令 E 是总电子能量，考虑相对论运动学，所以 $E\gg mc^2$.

(i) 用上述参量解析地表示出所必需的场强 B.

数值上用高斯计算 B，设 $R=30$ 米，$E=2.5\times10^9$ 电子伏特，对问题的这一部份，你将想起某些普适常数.

(ii) 事实上，电子辐射电磁能，因为它被 B 场加速. 但是，假设每圈损失的能量 ΔE 与 E 相比较是微小的.

用参量解析地表示出比率 $\Delta E/E$. 然后对上面给出的 R 和 E 的特殊值，数值上计算这一比率.

C4. 讨论(圆)频率 ω 的电磁波通过电离化介质的传播. 取下列近似: 1) 作用在电子上的洛伦兹力的磁分量 $\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 可以忽略; 2)电磁场与原子离子的相互作用可以完全忽略(由于它们的大质量); 3)电子-电子和电子-离子相互作用可以忽略，令 e, m, n 分别为电子的电荷，质量和数密度.

(i) 证明只有在某一临介“等离子体”频率 ω_p 以上的频率 ω 才能传播. 推导 ω_p 的表示式.

(ii) 对 $\omega>\omega_p$，证明相速度大于真空中的光速 C. 这会引起麻烦吗? 试讨论这一结果.

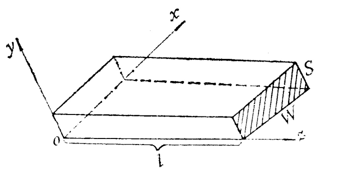
C5. 为了检测地球通过以太的运动而设计了迈克尔逊-莫雷实验. 用一张图表示主要的实验安排，并用适当的方程分析人们按照经典的观念所期望发现的事情. 迈克尔逊和莫雷实际上所断言发现的是什么.

C6. 借助闪烁计数器研究一个 β 放射性同位素样品，该计数器能够检测衰变电子和精确确定单个的衰变时间.

(a) 令 τ 表示平均衰变寿命，样品含有很大的原子个数 N，每次衰变的探测几率是 ϵ. 计算闪烁体中的平均计数率，可以假设 τ 远大于测量所需的任何时间周期. 在 τ 的测量中，在一小时内精确地收集到 10,000 个计数，独立地确定闪烁体的探测效率为 0.4，N 确定为 10^{23}. τ 的测量值是多少? 在 τ 的这种测量中的统计误差是多少(标准偏差)?

(b) 令 $P(t)dt$ 为时间 t 到 $t+dt$ 内闪烁体中两次连续计数的几率. 依赖于 t,ϵ,N,τ 计算 $P(t)$.

C7. 在真空中宽 W、相距为 S 的金属平行板传输线在 $z=0$, l 处用金属平面端接.



(a) 在传输线的这样一节中的最低频率驻波是横电磁波(TEM)，它沿 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 沿 z 轴的分量. 求最低频率 TEM 模共振频率 f_1. 你可以忽略在 $x=0$, w 处的开口边的缘节. 还可以假设金属有理想的电导率.

(b) 给定 E 场的峰振幅 E_0，写出共振频率 f_1 的场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的笛卡尔分量的空间相关性.

(c) 实际的金属具有很大的但有限的电导率. 用理想电导率的解作为场和面电流的一级(好的)近似，计算 f_1 共振的每周的欧姆能量损耗，将答案用 E_0、δ、σ 和线度来表示，此处 δ 是频率 f_1 的趋肤深度，σ 是电导率，忽略在终端板中的欧姆损耗(由于 $l\gg s$)并假设 δ 比板的厚度为小. 板的电阻是厚度 δ 且具有均匀电导率 σ 的膜的电阻.

C8. 实际工作的物理学家经常发现需要得到各种量的粗略估计，对下列量给出数值估计. 提示: 如果你的记忆使你失望，为了准确，可以由其他或许更为熟知的量预先估计出所要求的大多数必需的基本常数和地球物理量. 例如，由已知太阳对地球的对向为 $1/2^\circ$ 和地球-太阳距离(1天文单位)为 92.9×10^6 英里估计出太

阳的直径.

(a) 近地点彗星的速度，此处近地点$=0.1$天文单位.

(b) 太阳的表面温度,太阳常数(恰在地球大气外与太阳光束成直角的单位面积上每单位时间落到的能量)是1.35千瓦/米^2.斯忒藩-玻尔兹曼常数是5.67×10^{-8}瓦米$^{-2}$ (K)$^{-4}$.

(c) 电子显微镜中电子束的能量(用电子伏特).电子显微镜的衍射极限分辨率比光学显微镜的分辨率要好10^4倍.

(d) 使半径为$R=1.0$米的孤立金属球带上14万伏特所需要的能量(用焦耳).

(e) 把一锥60兆电子伏特的^{12}C离子束(电荷态$=6^+$)射向半径$R=1.0$毫米的孤立的钽球. 束淀积能量是这个球辐射黑体能量,问需要多大的束流(用安倍)才能维持球于它的熔解温度.

(f) 假设潮汐力将最终引起地球和月球间的距离减少. 估计月球开始破裂的距离(为了简单,假设地球和月球有相同的密度).

解 题 部 分

C1. 配分函数°

$$Q=\text{常数}\times\left[\int d^3pe^{-(\beta p^2/2m)}\right]^N\int d^3x_1\cdots d^3x_Ne^{-\beta\sum\sum_{i<j}V(r_{ij})}$$

因此

$$Q=\beta^{-3N/2}f(V,N)E=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Q=\frac{3}{2}NkT$$

$$P=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln Q=kTg(V,N)\ \frac{\partial^2P}{\partial T^2}=0.$$

C2. (i) 假设开始时$\boldsymbol{\omega}$的指向几乎沿着1轴或3轴,作小量近似可得到$\omega_2(t)$和$\omega_3(t)$是振荡的但无指数增长,是稳定的.

(ii) 若开始时$\boldsymbol{\omega}$的指向几乎沿着2轴,作小量近似,可得到ω_1和ω_3的方程,其解是指数增长解,不稳定.

C3. (i) 场强

$$B=\frac{cP}{eR}\approx\frac{E}{eR}(\simeq2800\text{ 高斯}).$$

(ii) 辐射功率

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{dP_\mu}{d\tau}\frac{dP^\mu}{d\tau}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{v}{c}\right)^4\Gamma^4\qquad\Gamma=\frac{E}{mc^2}$$

比率

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3\left(\frac{e^2}{mc^2R}\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3$$

C4 由麦克斯威方程得到色散关系

$$\omega^2+4\pi i\sigma\omega=k^2c^2$$

因而导至$c^2k^2=\omega^2-\omega_p^2$, 其中

$$\omega_p=\sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$$

可以见到当$\omega<\omega_p$无传播;当$\omega>\omega_p$,$v_{相}=\frac{\omega}{k}>c$, 但$v_{群}=\frac{d\omega}{dk}=c\left(\frac{ck}{\omega}\right)<c$因此不会引起麻烦.

C5. 迈克尔逊-莫雷实验装置和原理可以在一般教科书中找到,这里从简.

C6. (a) 平均计数率是$R=\frac{\epsilon N}{\tau}$, 涨落误差是(计数数目)$^{1/2}$,所以

$$\frac{\Delta\tau}{\tau}=\frac{1}{\sqrt{10^4}}\qquad\Delta\tau=4.5\times10^{12}\text{ 年}.$$

(b) 计数之间的平均时间是$\bar{t}=\tau/\epsilon N$

$$P(t)=\frac{1}{\bar{t}}e^{t/\bar{t}}=\frac{\epsilon N}{\tau}e^{-\epsilon Nt/\tau}$$

C7. (a)长度l对应于半波长,所以$f_1=c/2l$

(b) $E_{切向}=0$ $H_{法向}=0$

$E_y=E_0\sin kz$ $B_x=iE_0\cos kz$.

(c) 每周每单位体积的欧姆损耗是

$$P=\frac{1}{2\sigma}|J|^2$$

$$J=\frac{cE_0}{4\pi\delta}\cos kz,$$

因此总功率

$$P=\frac{1}{2\sigma}E_0^2\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2\frac{Wl}{\delta}.$$

C8. (a) 总能量

$$E\simeq0=1/2mv^2-GmM_\odot/r$$

所以$v^2_{彗星}=\frac{2GM_\odot}{r}\simeq2.6\times10^9$英里/年

$=3\times10^5$英里/小时

(b) $T\simeq6000$°K

(c) $E=\frac{P^2}{2m}\simeq600$电子伏特 $\left(\lambda=\frac{h}{p}\right)$.

(这里取了光学波长为几千埃估计的)

(d) $U=\int_0^Q VdQ=\int_0^Q\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}dQ$

$\simeq5.5\times10^3$焦耳.

(e) 离子束将完全停在球内,因此释放它的全部能量,由此得$I_e=8\times10^{-6}$安培.

(f) 当来自月球和地球的力相等时,月球开始破裂,因此

$R\simeq7600$英里.

(朱启明 译　黄涛 校)