美国各大学 1983 年在华招收物理研究生试题 参考答案部分(下)

B. 近代物理参考答案

B1. (a) 薛丁格方程

$$i\hbar\frac{\partial|\phi\rangle}{\partial t}=H|\phi\rangle$$

$$H=-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}=-\gamma\boldsymbol{S}\cdot B_0\hat{y}$$

$$=-\frac{\gamma B_0\hbar}{2}\sigma_y$$

式中 σ_y 是泡利自旋矩阵

现令 $|\phi\rangle(t)=a(t)|+\rangle+b(t)|-\rangle$,

$$|\phi\rangle(t)=\cos\left(\frac{\gamma B_0}{2}t\right)\Big|+\rangle-\sin\left(\frac{\gamma B_0 t}{2}\right)\Big|-\rangle.$$

(b) 一个算子 Q 的平均值是 $\langle\phi|Q|\phi\rangle$,

$$\langle S_x\rangle=\frac{\hbar}{2}(a^*b^*)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=-\frac{\hbar}{2}\sin(\gamma B_0 t)$$

$$\langle S_y\rangle=\frac{\hbar}{2}(a^*b^*)\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

S_z: $$\langle S_z\rangle=\frac{\hbar}{2}(a^*b^*)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\hbar}{2}\cos(\gamma B_0 t).$$

B2. (a) 在阈值时,系统的不变质量

$$M=m_\pi+m_D=\sqrt{E^2-P^2}=\sqrt{(E_p+m_p)^2-P^2}$$

$$T=T^*=\frac{(m_\pi+m_D)^2-2m_p^2}{2m_p}-m_p=286.1\text{MeV}.$$

(b) 在质心系单位立体角的归一化几率是

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{dP}{d\Omega'}\frac{d\Omega'}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi}\frac{d(\cos\theta')}{d(\cos\theta)}$$

洛仑兹变换,

得 $$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{Q}{4\pi}=\frac{m_\pi\beta\gamma}{4\pi\bar{\gamma}P'\left(1-\frac{\bar{\beta}}{\beta}\cos\theta\right)}$$

(c) 如果

$$1-\frac{\bar{\beta}}{\beta}\cos\theta=0,\quad \frac{dP}{d\Omega}$$

将是奇异的.

质心系中 π 向后,显然 $\beta<\bar{\beta}$. 如果入射能量不那么高,π 在实验室系也能向后,明显地存在满足条件的实验室系角度,即最大可能实验室角度. 在此角度上,质心和实验室之间角度的变换是奇异的. 对于非常高的入射能量,π 也能在实验室系向后散射,这种所谓的雅可俾峰值不出现在 $\frac{dP}{d\Omega}$ 中.

B3. (a)

$$\underbrace{1s^2\quad 2s^2\quad 2p^6}_{\text{主量子数}}$$

(b) $L_1=1$, $L_2=0$

则有

$L=1$ 和 $S=1$ $\Longrightarrow J=2,1,0.$

$L=1$ 和 $S=0$ $\Longrightarrow J=1.$

总态数

(L,S,J): $(1,1,2)$ $(1,1,1)$ $(1,1,0)$ $(1,0,1)$

(c) 在 $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{S}$ 耦合中导出 Landé 的 g 因子式子,

$$g=\frac{3}{2}+\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}}{2\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}}.$$

$$g=\frac{3}{2}+\frac{S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$$

对于 $L=1$, $S=1$, $J=2$ 情形 $g=3/2$

(d) J_c 有两个可能值 $3/2$, $1/2$. $J_c=3/2$ $L_2=1$

所以

$K=5/2,\ 3/2,\ 1/2$

$J=3\ 2\quad 2\ 1\quad 1\ 0$

与 $S_2=1/2$ 耦合有: $J_c=1/2$, $L=1$

所以 $K=3/2,\ 1/2$

$2\ 1\quad 1\ 0$

与 $S_2=\frac{1}{2}$ 耦合

总共状态有 (J_cK,J):

$(3/2,5/2,3)$ $(3/2,5/2,2)$ $(3/2,3/2,2)$

$(3/2,3/2,1)$ $(3/2,1/2,1)$ $(3/2,1/2,0)$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},2\right)\ \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

B4. (a) 式两边对 α 求微商可得:

(b) 考虑

$\alpha\beta x^3=\alpha x^2\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}\cdot x\leqslant(1)\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}(1)$ 便可求得

(c)

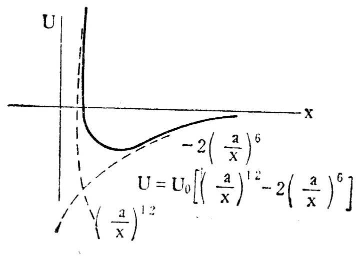

图 8

$$\frac{dU}{dx}=U_0\left[\frac{-12a^{12}}{x^{13}}-2(-6)\frac{a^6}{x^7}\right]=0$$

所以 $x=a$ 是U的最小值。

$$\alpha=\frac{1}{\bar{x}}\frac{d\bar{x}}{dT}=\frac{1}{a}\frac{7}{48}\frac{kK}{U_0}=\frac{7}{48}\frac{K}{U_0}$$

B5. (a)(1)

$$N(E)=\frac{dN}{dE}=\frac{dN}{dn}\cdot\frac{dn}{dE}=\frac{L}{\pi}\left(\frac{2m}{\hbar^2E}\right)^{1/2}$$

(2) $$N(E)=\frac{mL^2}{\pi\hbar^2}=\frac{mA}{\pi\hbar^2}.$$

(3)

$$N(E)=\frac{L^3}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}E^{1/2}=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot E^{1/2}.$$

(b)(1) 两次碰撞的平均时间与碰撞几率成反比，几率直接地与费米面的态密度成正比，于是，

$$\tau_E\sim\frac{1}{N(E_F)},\quad 而\quad D\sim\frac{v_F^2}{N(E_F)}.$$

(2) 传导率σ只与 v_F^2 有关，

故这一问题归结为计算 E_F 与数密度的关系，

一维情形:

$$E_F\sim n^2\ 和\ \sigma\sim n^2.$$

二维情形:

$$E_F\sim n,\quad \sigma\sim n.$$

三维情形:

$$E_F\sim n^{2/3},\quad \sigma\sim n^{2/3}.$$

B6. (a) 粒子的总角动量 $L=1$

(b) $$\langle L_z\rangle=\frac{\int\psi^*L_z\psi d^3r}{\int\psi^*\psi d^3r}$$

径向积分消去，Y_l^m

$$\langle L_z\rangle=\frac{|i-1|^2\hbar+|i+1|^2(-\hbar)+0}{|i-1|^2+|i+1|^2+(2\sqrt{2})^2}=0.$$

(c) $$\frac{|i-1|^2}{|i-1|^2+|i+1|^2+(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{6}.$$

(d) $$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi}\left\{\sin\theta\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\theta\right\}^2.$$

C. 经典与近代物理杂题参考答案

C1 (a) 由热力学知 $Q_2/T_2=Q_1/T_1$

则 $$Q_1=P+Q_2\quad Q_1/Q_2=P/Q_2+1$$

故 $$\frac{Q_2}{P}=\frac{T_2}{T_1-T_2}$$

(b) 见图 9

$$T_2=T_1+\frac{P}{2A}-\sqrt{\frac{P}{A}T_1+\left(\frac{P}{2A}\right)^2}$$

(c) $T_1=311.26°K$,

$=38.26℃$

(d) 见图10

$$T_1=274.74K=1.74℃$$

或

C2 (a)

A处的强度是

$$I_A(t)=\frac{I}{4\pi l_A^2}\left[2+2\cos\{(\omega_1-\omega_2)t+l_A(k_1-k_2)\}\right]$$

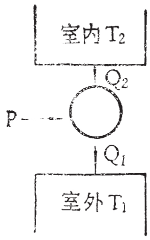

图 9

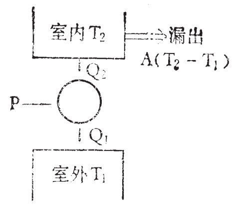

图 10

$$R_A(t)=\frac{IS}{2\pi\hbar\omega l_A^2}[1+\cos(\Delta\omega t)]$$

同样，

$$I_B(t)=\frac{I}{2\pi l_B^2}[1+\cos(\Delta\omega t+(l_B-l_A)(k_1-k_2))]$$

计数率

$$R_B(t)=\frac{IS}{2\pi\hbar\omega l_B^2}\left[1+\cos\left\{\Delta\omega t+\frac{(l_A-l_B)}{C}\Delta\omega\right\}\right]$$

(b) 在A处[以率 $R_A(t)$ 发生]产生一脉冲，B处在时间间隔τ内产生一脉的时间为 $R_B(t)2\tau$. 于是符合率$R_{AB}(t)$为

$$R_{AB}(t)=R_A(t)R_B(t)(2\tau)$$

取时间平均，

$$\bar{R}_{AB}(t)=\frac{I^2S^2\tau}{2\pi^2\hbar^2\omega^2l_A^2l_B^2}\left[1+\frac{1}{2}\cos\left\{\left(\frac{l_A-l_B}{C}\right)\Delta\omega\right\}\right]$$

C3. (a)

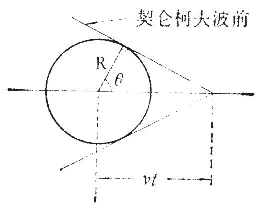

图 11

显然 $R=c/n\,t\quad \cos\theta=R/vt=Ct/n/vt=C/nv=1/\beta n$

(b) 阈值条件是 $v_{粒子}\geqslant C/n$.

在阈值时，等式成立，即 $v=C/n$

总能量 $$E=m_0\gamma C^2,$$

式中

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad \beta=\frac{1}{n}=\frac{1}{1+1.35\times10^{-4}}$$

动能

$$T=m_0C^2(59.86)=29.93\text{MeV}=0.02993\text{GeV}$$

(c)

$$\frac{dm_0}{m_0}=0.13$$

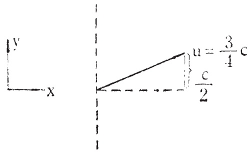

图 12

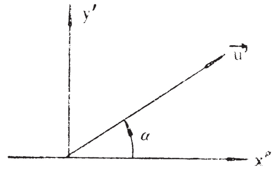

图 13

C4 (a) $$\alpha=\tan^{-1}\frac{8}{\sqrt{15}}.$$

(b) 速率 $|\boldsymbol{u}'|=\sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2}=u'$

所以 $$u'=\sqrt{\frac{79}{100}}\,C.$$

C5. (a) 一小时内，积累的计数率 N_C 误差为

$$\delta N_C=\sqrt{N_C},$$

于是 $\frac{\delta N_C}{N_C}=\frac{\sqrt{N_C}}{N_C}=0.01\quad N_C=2.734\times10^4$

现计算每小时有 10^4 个 ^{14}C 衰变，需要有W克.

($t_{1/2}=0.69315\tau_{平均}$， 所以 $\tau_{平均}=8266.6$ 年)

计算结果 $W=72.9$ 克.

(b) N_C 的误差为 $\sqrt{N_T}=\sqrt{N_C+N_B}$

$$0.01=\frac{\sqrt{N_C+2N_B}}{N_C}\quad N_C=2.376\times10^4$$

利用(a)的结果得到 $W=89.2$ 克.

(陈崇光译，编辑删减)