

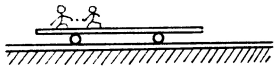
美国各大学 1983 年在华招收物理研究生试题

A. 经典物理试题

(下列 7 试题解 6 题)

A1. 铁道上质量为 M 的平板货车, 可无摩擦地沿着直的水平铁轨滑动. 如图所示. 有 N 个人, 每人质量为 m , N 个人最初站在静止的平板车上.

(a) N 个人一齐向车的一端跑, 使他们在跳下去以前(同时跳下去), 相对于车的速率为 V_r . 试计算这些人刚刚跳下去后车的速度.



图一

(b) N 个人, 一个接一个的跳下去(一次只能是一个人在跑), 每个人在刚刚跳下去以前相对于车达到的速率为 V_r . 求车的末速度表式.

(c) 在(a)和(b)情形中, 那种情形, 车得到较大的速度?

A2 考虑一个具有 N 个无相互作用的粒子系统, 每个粒子位置固定并带有磁矩 μ , 被放在一磁场 H 中, 每个粒子可以处在两个能量态 $E = 0$ 或 $E = 2\mu H$ 的一个态上. 这些粒子是可分辨的.

(a) 系统的熵可以写成 $S = k \ln Q(E)$ 形式, 式中 k 是玻尔兹曼常数, E 是总的系统能量. 解释 $Q(E)$ 的意义.

(b) 写出 $S(n)$ 的公式, 式中 n 是粒子处在较上状态的粒子数. 粗略地画出 $S(n)$.

(c) 导出大的 n 时斯特林(Stirling)公式:

$$\ln n! = n \ln n - n.$$

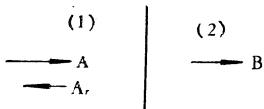
用一积分近似表示 $\ln n!$

(d) 利用(c)的结果重写出(b)的结果. 求 $S(n)$ 是极大时的 n 值.

(e) 将 E 作连续量处理, 证明这个系统有负的绝对温度.

(f) 为什么在这里可能有负温度, 而在一个盒子内的气体不可能?

A3. 两种介质之间有一平的, 不可渗透的介面, 如图所示. 在介质(1)中产生一个压力振幅 A , 频率为 f 的平面声波, 传向介质(2). 取 A 和 f 作为已知量并假设传播方向垂直介面. 介质(1)有密度 ρ_1 和声速 c_1 , 而介质(2)有密度 ρ_2 声速 c_2 .



图二

(a) 介面处的边界条件是什么?

(b) 应用这些边界条件, 导出波反射回到介质(1)的波的压力振幅 A_r , 和透入到介质(2)波的压力振幅 B .

A4. 考虑一个质量 m 的行星在围绕质量为 M 的太阳转动的轨道上. 假设在太阳和行星周围的空间充满着密度 ρ 的均匀分布的尘埃.

(a) 证明: 尘埃的效应是一个向心的附加吸引力.

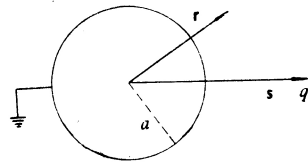
$$F' = -mKr \quad \text{式中 } K = \frac{4\pi\rho}{3}G \quad (G \text{ 为引力常数})$$

可以忽略任何的由尘埃粒子碰撞所引起的阻力.

(b) 用 L, G, M, m 和 K 表示, 给出轨道半径 r_0 所满足的方程, 不必求解. (其中 L 是行星作圆周运动的角动量).

(c) 假设 F' 同太阳的引力相比是小的, 并假设轨道仅稍微偏离(b)中给出的圆形轨道. 由考虑径向和方位运动的频率, 证明这个轨道是一个进动的椭圆, 计算进动的角频率 ω_p , 将它用 r_0, ρ, G 和 M 表示.

(d) 椭圆进动的轴与轨道角速度的方向相同还是相反?



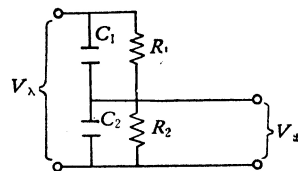
图三

A5 有半径为 a 的接地的理想球形导体, 距其中心矢径 s 处有一点电荷 q .

(a) 如果(除了 q 外)球外是真空, 计算球外任意点 r 处的静电势, 照通常考虑

的那样取地的势为零.

(b) 如果用介电常数为 ϵ 的电介质代替(a)中的真空, 重新计算(a).



图四

A6. 考虑如图所示的线路.

(a) 当 $V_{in} = \text{Re}\{V_0 e^{i\omega t}\}$ 计算 V_{out} 的复数表达式.

(b) 在什么条件下 V_{out}/V_{in} 比值与 ω

无关?

(c) 如果 V_{in} 是一个单“矩形”脉冲, 如下图所示, 当(b)中所述条件满足时,

画出 V_{out} 的图形(作为时间 t 的函数)

(d) 对于像在(c)中的那样一个“矩形”脉冲, 当(b)中所述条件不满足时, 定性地画出 $V_{out}(t)$ 图形.

A7 一根橡皮带处在平衡下的张力是由

$$t = AT \left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2} \right)$$

给出. 式中 t = 张力, T = 绝对温度, x = 带长, l_0 = 当 $t = 0$ 时的带长, A = 常数.

当在恒定长度 l_0 下加热时, 观察到带的热容量 $C_x(x, T)$ 为一常数 K .

(a) 求作为 T 和 x 函数的

1) $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T$ (式中 E 是内能) 2) $\left(\frac{\partial C_x}{\partial x}\right)_T$ 3) $C_x(x, T)$

4) $E(x, T)$ 5) $S(x, T)$ (式中 S = 熵)

(b) 橡皮带绝热地从 $x = l_0$ 拉伸到 $x = 1.5l_0$. 它的

初始温度是 T_0 。问它的最后温度为若干?

B. 近代物理试题

(下列 6 试题解 5 题)

B1. 考虑一个内禀角动量 $\sqrt{S(S+1)\hbar}$ 的中性粒子, 式中 $S = \frac{1}{2}$, 即一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子。假设该粒子有磁矩 $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{s}$, γ 是一个常数。该粒子的量子力学状态可以用本征矢量 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 所张的自旋空间来描述。 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 表示自旋排列方向与 Z 轴平行和反平行。(即 $S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$, $S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$.)

已知在时间 $t=0$ 时, 系统的态是 $|\psi\rangle(t=0) = |+\rangle$ 这个粒子沿着 Y 轴穿过一均匀磁场, 磁场方向沿 Y 轴, $\mathbf{B} = B_0 \hat{y}$.

(a) 以 $|+\rangle$, $|-\rangle$ 为基, 求 $|\psi\rangle(t)$?

(b) 求可观察量 S_x , S_y , S_z 的期望值, 它们是时间的函数。

B2. 反应 $P + P \rightarrow \pi^+ + p$ (1)

在这反应中, 从加速器射出的高能粒子撞击静止质子产生出正的 π 介子和氦核是“早期”高能物理的一个很重要的反应。

(a) 计算在实验室坐标系中, 入射质子的阈动能 T^* (阈动能 T^* 是产生反应 (1) 的最小实验室动能)。用质子质量 m_p , π 介子质量 m_π 和氦核质量 m_D 表示 T^* 。取 $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$, $m_D = 1874 \text{ MeV}/c^2$ 和 $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ 。计算出 T^* 的值。

(b) 假设反应 (1) 在质心系内是各向同性的, 也就是说立体角元 $d\Omega_{质心} = d\phi' d(\cos\theta')$ 内产生一个 π^+ 的几率是与角度无关的一常数。求实验室系中, 单位立体角的 π^+ 介子的归一化几率, 用 $\cos\theta_{实验}$, 质心速度 βC , 在实验室系中 π^+ 的速度 β_C 和质心系中的动量 P' 来表示。

(c) 像 (1) 式那样的两体吸热反应中, 在实验室中对于一反应产物单位立体角内的几率在角度 $\theta = 0$ 处可能是奇异的。这一结果与 (b) 所导出的结果有何联系? 简单评述一下, 不需作出所有的运动学。

B3. 稀有气体原子结构的特征是最高的 P -壳层均被填满。因此, 例如在氦中的电子组态是 $1S^2 2S^2 2P^6$ 。这样一个满壳层组态的总角动量 \mathbf{J} , 总轨道角动量 \mathbf{L} , 和总自旋角动量 \mathbf{S} 均为零。

(a) 解释符号 $1S^2 2S^2 2P^6$ 的意义。

(b) 在氦原子中最低的激发态组是相应于一个 $2P$ 电子激发到 $3S$ 轨道上去。($2P^2$) 壳心其轨道和自旋角动量与拿去的电子的轨道和自旋角动量大小相等, 但方向相反。因此, 同激发电子相互作用, 壳心可以作为 P 波电子来处理。设 L , S (Russell-Saunders) 耦合, 计算这一组状态量子数 (L, S, J) 。

(c) 当一个原子放在一磁场 H 中, 它的能量改变 (与 $H=0$ 情形相比) ΔE :

$$\Delta E = \frac{c\hbar}{2mc} gMH$$

式中 M 可以是 $J, J-1, J-2, \dots, -J$ 。 g 就是通常所说的

Lande g 因子。计算氦的 $1S^2 2S^2 2P^3 3S$ 组态的 $L = 1, S = 1, J = 2$ 态的 g 。

(d) 氦的 $1S^2 2S^2 2P^3 3P$ 组态的结构用 Russell-Saunders 耦合理论描述是很不成功的。一种较好的描述是“对耦合”方案, 在这方案中是外层电子的轨道角动量 \mathbf{L}_2 与壳心的总角动量 \mathbf{J}_c 耦合。然后, 合矢量 $\mathbf{K} (\mathbf{K} = \mathbf{J}_c + \mathbf{L}_2)$ 再与外层的一电子的自旋 \mathbf{S}_2 耦合给出这一原子的总角动量 \mathbf{J} 。计算 $1S^2 2S^2 2P^3 3P$ 组态的状态量子数 J_c, K, J 。

$$B4. (a) \text{ 已知 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\text{证明 } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \alpha^{-3/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \alpha^{-5/2}$$

$$(b) \text{ 已知 } \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \ll 1 \text{ 和 } a \text{ 的数量级为 } \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{证明 } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\alpha(x^2 + \beta x^3)} dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (1 - \alpha \beta x^3) e^{-\alpha x^2} dx$$

(c) 两个原子通过 $U(x) = U_0 \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right]$ 势相互作用。式中 x 是两原子的间距。草绘这势曲线。计算 $U(x)$ 为极小时的 x 值。

(d) 已知一列这样的原子, 被约束仅在 x 轴上运动, 并假设每个原子仅与它的最近邻者相互作用, 利用经典统计力学计算平均原子间距 $\bar{X}(T)$ 。为此, 围绕它的极小值展开, 并保留若干必要项以得出最低级的温度关系 $\bar{X}(T)$ 。假设 $kT \ll U_0$, 在相关的积分中, 把积分限扩展到 $\pm\infty$ 是合理的。明确地对积分限扩展的合理性加以解释, 并计算

$$\lambda = \frac{1}{X} \frac{d\bar{X}}{dT}$$

B5. 考虑一无相互作用的费米电子气。假设电子是非相对论性的。

(a) 求以下几种情形, 作为能量函数的态密度 $N(E)$ ($N(E)$ 是单位能量状态的数目):

1. 粒子约束在仅沿长度 L 的一条线上运动。
2. 粒子只在二维的面积 A 上运动。
3. 粒子在三维体积 V 内运动。

(b) 在固体中费米电子气, 当 $T \ll T_F$ 时 (气体温度远小于费米温度) 被声子和不纯物所散射限制了电传导。在这种情形下, 传导率 σ 可写成为

$$\sigma = e^2 N(E_F) D$$

式中 e 是电子电荷, $N(E_F)$ 是上面所定义的态密度是在费米能量处求出的, D 是电子的扩散率, D 正比于费米速度平方乘两次散射之间的平均时间 τ_e (即 $D \sim V_F^2 \tau_e$)。

(1) 对扩散率取决于 $N(E_F)$ 给出一种物理论证。

(2) 计算在 (a) 的三种情形中, 每种情形 σ 与总的电子密度的关系。电子密度是适合以上题意的单位体积, 单位面积或单位长度的总电子数。

B6. 考虑由波函数 $\psi = K[X + Y + 2Z]e^{-r}$ 来表示一无自旋粒子。式中 $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, K 和 α 是实常数。

(a) 粒子的总角动量是多少?

(b) 角动量的 Z 分量的期望值是多少?

(c) 如果测得角动量的 Z 分量 L_z , 问测到值 $L_z = +\hbar$

的几率是多少?

(d) 找到粒子在 θ, ϕ 的立体角 $d\Omega$ 内的几率是多大? 在此 θ, ϕ 是通常的球坐标的角度. 最初几个球谐函数的下述表达式是有用的.

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; Y_1^0 = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_1^{\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos\theta; Y_2^0 = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi}.$$

C. 经典与近代物理杂试题

(下列 6 题中选 5 题)

C1. “空调器”是一种室内致冷的装置. 实际上, 它是一个致冷机, 在致冷机内通过作机械功把热量从(较冷的)室内排到(较暖的)室外. 一台家用做可逆的卡诺循环的空调器, 在室内绝对温度 T_2 和室外绝对温度 $T_1 > T_2$ 之间作连续运行时, 消耗功率线的 P 焦耳/秒.

(a) 一秒内, 空调器从室内吸收 Q_2 焦耳放到室外 Q_1 焦耳. 试导出用 T_1 和 T_2 表示的效率比 Q_2/P .

(b) 热量按牛顿律 $Q = A(T_1 - T_2)$ 逸入室内. 试导出一个空调器在恒定的室外温度 T_1 和均匀的(空间)室内温度 T_2 条件下, 连续运转时, 用 T_1, P 和 A 写出 T_2 的表达式.

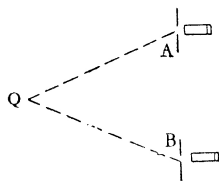
(c) 空调器是由一个开关恒温器来控制的, 注意到恒温器放在 20°C 的室内, 室外温度为 30°C 时, 它只运转 30% 时间. 求要保持室内温度为 20°C 的情况下, 用 $^\circ\text{C}$ 表示室外最高温度(用 -273°C 作为绝对零度计).

(d) 在冬天时, 循环倒过来, 这个装置成了一个热泵, 它从室外吸取热量放到室内. 求保持室内温度 20°C 情况下, 用 $^\circ\text{C}$ 表示室外的最低温度.

C2. 有一点光源 Q , 各向同性地发射 ω 和 $\omega + \Delta\omega$ 两个频率的光, 其功率相同为 I 焦耳/秒. 有两个探测器 A 和 B , 置于离 Q 相距 l_A 和 l_B 距离处, 如图所示, 每个探测器具有(小的)灵敏面积 S 能对各自的光子作出响应. 以下取 $\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1$, 并假设实验是在真空中进行的.

(a) 计算作为时间的函数在 A 处和 B 处各自的光子计数率. 考虑时间标度 $\gg \frac{1}{\omega}$.

(b) 如果现在把从 A 和 B 输出的脉冲放到分辨时间为 τ 的一个符合线路上, 问对时间平均的符合计数率是多少? 假设 $\tau \ll \frac{1}{\Delta\omega}$, 请记住在 τ 时间内, 如果有两个输入脉冲分别从 A 和 B 到达符合线路, 符合线路才给出一个输出脉冲.



图六

C3. 当一个带电的高能粒子在介质中的运动速度大于电磁波在介质中传播的速度时, 它就发出契伦科夫辐射.

(a) 导出粒子速度 $v = \beta C$, 介质的折射率 n 和契伦科夫辐射相对于粒子飞行直线所构成的 θ 角度之间的关系.

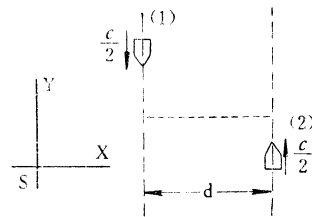
(b) 在 20°C , 一大气压下, 氢气的折射率 $n = 1 + 1.35$

$\times 10^{-4}$. 为了能使一个电子(质量为 $0.5\text{MeV}/C^2$) 在 20°C 和一大气压的氢气介质中穿过而发出契伦科夫辐射, 该电子应有最小的动能为若干 MeV?

(c) 用一根长的管道充以 20°C 一大气压的氢气加上光学系统制成的契伦科夫辐射探测器, 能探测到的发射角为 θ 的辐射光, 精度为 $\delta\theta = 10^{-3}$ 弧度. 一束动量为 $100\text{GeV}/C$ 的荷电粒子通过计数器. 由于粒子的动量是已知的, 故实际上契伦科夫角度的测量就是对粒子静止质量 m_0 的一种度量. 对于接近 1GeV 具有 m_0 的粒子, 用契伦科夫计数器决定 m_0 到一级小量时, 相对误差 $\frac{\delta m_0}{m_0}$ 是多少?

C4. 在一惯性坐标系 S 观察, 有两个宇宙飞船沿直线取相反方向飞行. 平行轨道相距 d , 如图所示. 飞船的速率都是 $C/2$. 式中的 C 为光速.

(a) 在飞船行至彼此最接近的两点的瞬间(由 S 系观察), 即在图中用虚线表示处, 飞船(1)以 $3/4 C$ 的速率抛出一件小包(也是在 S 系观察). 在飞船(1)上看, 为了使飞船(2)接到这个小部件, 部件的抛出角度应为多少? 假设在飞船(1)上的观察者所在的坐标系其坐标轴都平行 S 坐标系的轴, 如图所示, 运动的方向平行于 Y 轴.



图七

(b) 在飞船(1)上的观察者所看到的这件小包的速率有多大?

C5. 在大气中的二氧化碳中放射性 ^{14}C 的浓度几乎是稳定的, 这种 ^{14}C 是次级宇宙线与大气中的氮相互作用不断产生的. 当一个活的机体死去, 它的碳含有大气的浓度, 不过随着时间的推移, ^{14}C 成分通过放射性衰变而减少. 这就是利用放射性碳确定生物生存年代这一技术的基础.

在以下问题中, 你可假设在大气中 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比值是 10^{-12} , 而 ^{14}C 的 β 衰变的半衰期是 5730 年.

(a) 现在想用放射性碳测定年龄的方法定出碳的样品的年龄. 为了测定年龄的精度为 ± 50 年(标准偏差为 50 年)需要多少克的样品? 假设这个样品实际上有 5000 年, 用一个 100% 效率的探测器, 对放射性进行一个小时的无本底计数.

(b) 重复(a), 不过现在假设探测器中有本底计数率(这是由于探测器本身中的放射性以及宇宙射线等所引起的), 本底的平均值精确知道为 4000 计数/每小时.

C6. 在以下列出的三个实验中, 选两个并叙述它们对近代物理学的贡献. 对实验装置作一简单的描述, 并给出有关参数和实验结果的近似数值. 明确地解释所包含的基本物理原理.

(a) 汤姆逊实验, (J. J. Thomson's)

(b) 斯特恩-革拉赫(Stern-Gerlach)实验.

(c) 戴维逊-革末(Davisson-Germer)实验.

(陈崇光译 黄涛校)