



中子星

——第53届IPHO理论第2题

杨远庆¹ 宋 峰²

(1. 广州外国语学校 510000; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

2023年第53届国际物理奥林匹克竞赛理论题第二题是关于中子星的。中子星(Neutron Star)为宇宙中最致密的天体之一,关于中子星的研究横跨理论物理、核物理、相对论和观测天文学等多个领域。一些理论计算表明,中子星可能具有极强的磁场($10^8 \sim 10^{15}$ 高斯)和非常大的自转角速度(周期为毫秒至秒级)。

1932年,詹姆斯·查德威克(James Chadwick)在英国剑桥大学卡文迪什实验室发现中子,同年,朗道(Lev Davidovich Landau)提出宇宙中可能存在一种完全由中子构成的致密星体。1934年,巴德(Walter Baade)和兹威基(Fritz Zwicky)在《物理评论》的论文提出超新星爆发过程中恒星的核心会在巨大的引力下坍缩,电子被压入原子核,与质子结合成中子,最终形成由简并中子物质构成的致密天体,并首次使用“中子星”(neutron star)一词。1939年,奥本海默(J. Robert Oppenheimer)和沃尔科夫(George Volkoff)在托尔曼(Richard Tolman)早期工作的基础上首次推导出了基于广义相对论下的流体静力学方程,即TOV方程(Tolman-Oppenheimer-Volkoff方程),确定中子简并压力无法抵抗引力坍缩的临界质量,从而计算了中子星的质量上限(即TOV极限),最初估算为 $0.7M_{\odot}$ (现代计算认为实际极限更高,约 $1.5 \sim 3M_{\odot}$, $M_{\odot}$ 为太阳质量)。

1967年,剑桥大学的贝尔(Jocelyn Bell)和她的导师休伊什(Antony Hewish)在射电波段探测到周期为1.337秒的规则脉冲信号(CP 1919,后命名为PSR B1919+21)。1968年,戈尔德(Thomas Gold)提出“脉冲星灯塔模型”(Lighthouse Model),指出“脉

冲星”就是快速旋转的、具有极强磁场的中子星,并解释其周期性辐射机制。1970年,乌呼鲁卫星(Uhuru)发现了许多的X射线双星系统(如Her X-1),这些系统中,其中一个致密天体(中子星或黑洞)吸积伴星物质从而产生周期性X射线辐射。这些观测进一步证实了中子星的高密度和强引力场。1974年,赫尔斯(Russell Hulse)和泰勒(Joseph Taylor)发现PSR B1913+16(双脉冲星系统,位于天鹰座),其轨道周期(约7.75小时)以每年76微秒的速度衰减,与广义相对论预言的引力波辐射能量损失完美吻合。

1982年,发现了PSR B1937+21中子星(周期1.558毫秒),表明中子星可通过吸积物质重新加速(Recycling Model)。这类脉冲星被称为“毫秒脉冲星”,其磁场较弱($\sim 10^8$ 高斯),但自转极快(100-700 Hz)。1987年,大麦哲伦云超新星SN 1987A爆发,全球三个中微子探测器探测到的中微子爆发证实了大质量恒星的核心在耗尽核燃料后,在引力作用下坍缩,形成一个高密度的中子星或黑洞,这个过程释放出的巨大引力势能主要以中微子的形式带走。

本题以中子星为背景。我们对原题进行了翻译,并补充了相关背景知识。原题讨论了大质量原子核的稳定性,并从理论和实验两方面来估算中子星的质量。

A. 原子核的质量及其稳定性

由 Z 个质子和 N 个中子组成的原子核的静能 $m(Z, N)c^2$ 会小于组成其质子与中子(以下统称为核子)的静能之和,其差值即为原子核的结合能 $B(Z,$

N), 上式中 c 为真空中的光速。在求解原子核的结合能时, 一般可以通过体积能(相关项系数 a_v)、表面能($-a_s$)、库仑势能($-a_c$)以及对称能(a_{sym})来近似地拟合出原子核的结合能, 如下式所示:

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), B(Z, N) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} \quad (1)$$

式中 $A=Z+N$ 为质量数, m_N 为核子(非中子)质量, $a_v \approx 15.8 \text{ MeV}$ 、 $a_s \approx 17.8 \text{ MeV}$ 、 $a_c \approx 0.711 \text{ MeV}$ 及 $a_{\text{sym}} \approx 23.7 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 10^6$ 电子伏特)。

A.1 当 $Z=N$ 时, 为使原子核的比结合能 B/A 取到极大值, 求 A ;

A.2 当核质量数 A 为定值时, 比结合能 $B(Z, A-Z)/A$ 越大的原子核越稳定, 试利用式(1)计算 $A=197$ 时最稳定核素其原子序数 Z^* 的值;

A.3 当原子核的质量数 A 较大时, 它会通过裂变的方式分裂成较轻的原子核以使体系的静能最小化。现将模型简化, 只考虑 (Z, N) 原子核分裂成两个相同原子核的情况。若已知该过程发生的能量条件为:

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2$$

将上式改写成

$$\frac{Z^2}{A} > C_{\text{fission}} \frac{a_s}{a_c}$$

形式, 求 C_{fission} , 要求计算结果保留两位有效数字。

提示:

A.1: 求出比结合能 B/A 的表达式后直接对 A 求导并令其为 0 即可确定 A 的值。

A.2: 根据比结合能 B/A 的表达式对 Z 求导并令其为 0 即可确定 Z^* 的值。

A.3: 直接将(1)式代入能量条件, 最后将式子写成 Z^2/A 的形式即可求得 C_{fission} 。

B. 巨核中子星

对于质量数 A 大于临界值 A_c 的大质量原子核来说, 在分析其稳定状态时, 需要考虑引力作用产生的结合能(称为引力结合能)。

B.1 对于质量数 A 足够大的纯中子核($Z=0, N=A$), 假设在计算原子核的结合能时(1)式依然成立, 只是需要再增加引力结合能项, 且引力结合能项可表述为

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

其中 $M=m_N A$, $R=R_0 A^{1/3}$ 分别表示原子核的质量及半径, $R_0 \approx 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$ 。

当 $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ 时, 求 a_{grav} 的数值, 答案用 MeV 表示且保留一位有效数字, 计算中忽略(1)式中第二项 $a_s A^{\frac{2}{3}}$ 表面能的影响。在此基础上再计算临界值 A_c 的数值并保留一位有效数字。计算时取 $m_N c^2 \approx 939 \text{ MeV}$ 、 $G = hc/M_p^2$, 其中 $M_p c^2 \approx 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ 、 $hc \approx 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ 。

提示:

B.1: 在忽略表面能的影响下将引力能代入(1)式即可求解, 注意, 核素稳定的条件为结合能必须为正。另, 对于质量数很大的纯中子核而言, 其极端的致密性导致表面积相对于体积而言很小, 引力能却又很大($A^{5/3}$), 故忽略表面能是合理的。

C. 双星系统中的中子星

某些中子星是脉冲星, 它们会以恒定的周期规律性地发射电磁波(为描述方便, 下文统称为“光”)。这类天体常与白矮星形成双星系统。在如图 1 所示的星体构型中, 中子星 N 的光脉冲在射向地球 E

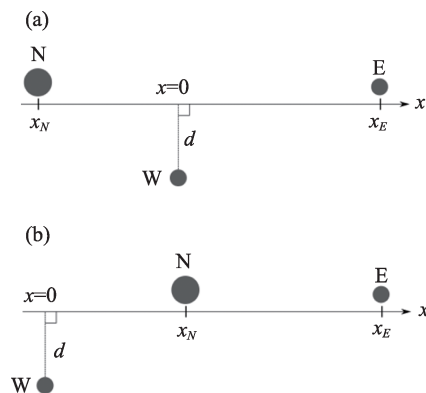
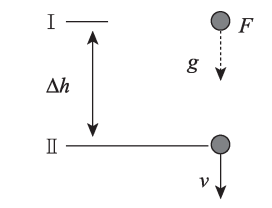


图 1 建立沿 N、E 的连线并从 N 指向 E 为正方向的 x 轴, (a) 对应于 $x_N < 0$, (b) 对应于 $x_N > 0$

时,会经过该双星系统中的白矮星W附近。我们通过测量这些受恒星引力影响的光脉冲来精确地计算出W的质量,进而确定N的质量。

C. 1 如图所示,在均匀的重力加速度 g 场中,有两个高度差为 $\Delta h(>0)$ 的水平面I、II。在I平面、II平面和自由落体参考系 F 中放置三个完全相同的时钟,依次标注为钟-I、钟-II和钟-F。



假想的思想实验

假设观察者携带钟-F,初始时刻,钟-F与钟-I处于同一高度且速度为零,显然有 $\Delta T_F = \Delta T_I$ 。现让 F 自由下落,并在 F 的参考系(可视为惯性参考系)中进行研究:在此参考系中,当时钟-II以速度 v 经过钟-F时,可以通过洛伦兹变换来确定钟-II的时间。将钟-F记录的时间记为 ΔT_I ,时钟-II上记录的时间记为 ΔT_{II} 。

试确定 ΔT_{II} 与 ΔT_I 的关系(精确到 $\Delta\phi/c^2$ 的一阶项,其中 $\Delta\phi = g\Delta h$ 为引力势的差值,即单位质量的引力势能差)。

C. 2 当光经过强引力区时,在远处测得的光速 c_{eff} 会与测量处本身的光速 c 不同。设 $\phi(r=\infty)=0$ 时, c_{eff} 可表示为 ϕ/c^2 的一阶近似形式:

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

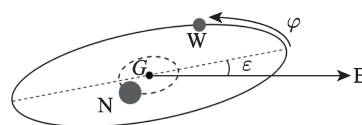
该式并不是因为C.1中未讨论的空间弯曲效应所导致的测量差别。注意到光的传播可以近似为直线,如图1(a)所示。现建立沿N、E的连线并从N指向E为正方向的 x 轴坐标系,取白矮星W最接近光传播路径的点为坐标原点($x=0$),则N的坐标为 $x_N < 0$,E的坐标 $x_E > 0$,W到光传播路径的垂直距离为 d 。

请根据上述所建模型估算:因质量为 M_{WD} 的白矮星引力作用而导致光线从N传播到E所用时间

的变化量 Δt ,并将结果在忽略以下小量的高阶项后再进行简化: $d/|x_N| \ll 1, d/|x_E| \ll 1, GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$ 。如有必要,可以参考以下积分公式:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} + C$$

C. 3 如下图所示,在双星系统中,假设脉冲星N和白矮星W沿圆轨道绕质心 G 运动,而圆轨道平面与 G 指向地球E的视线方向存在一个倾角 ε ,N与W之间的距离为 L , M_{WD} 为白矮星的质量。下文分析中我们始终假定 $\varepsilon \ll 1$ 。



双星系统

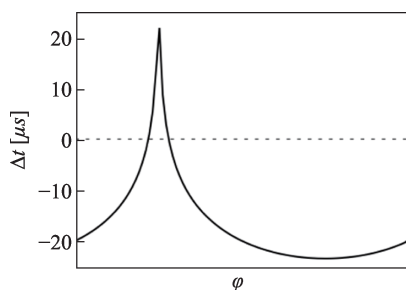
当我们在地球E上观测来自遥远的脉冲星N的光信号时,由于双星系统N-W的空间构型会随时间发生变化,故光信号到达地球的传播路径也会有所改变。当 $x_N \approx -L$ 时,光信号到达地球E的延迟时间达到最大值 Δt_{max} ;当 $x_N \approx L$ (对应图1(b)构型)时,延迟时间则为最小值 Δt_{min} 。

试计算 $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ 的表达式(忽略C.2所述各小量的高阶项)。注意,此处我们假定除白矮星W之外的其他天体的引力导致的延迟效应已相互抵消,不会产生实际影响。

C. 4 下图为观测到该双星系统(轨道间距 $L = 6 \times 10^6 \text{ km}$, $\cos \varepsilon \approx 0.99989$)的延迟时间随轨道相位 φ 的变化关系。

试根据这些数据估算白矮星质量 M_{WD} (以太阳质量 $M_{\odot}$ 为单位表示)。并将 $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$ 的计算结果保留一位有效数字。

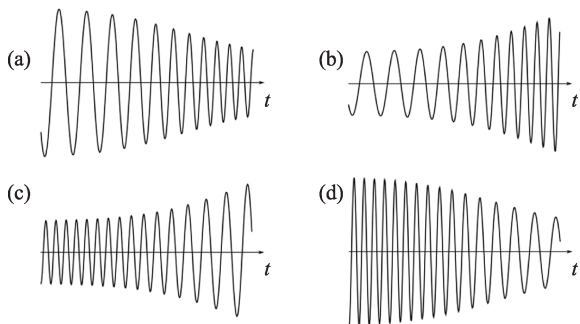
C. 5 在中子星双星系统中,星体辐射引力波会释放能量和角动量,最终发生碰撞并合并。为简单起见,假设中子星N质量足够大,白矮星W绕它做半径为 R 、角速度为 ω 的圆周运动。当忽略相对论效应时,角速度满足 $\omega = \chi R^n$,其中常数 χ 与角速度 ω



观测到的延迟时间 Δt 随轨道相位 φ (脉冲星 N 和白矮星 W 的轨道上的位置表述见 C.3 图) 的变化关系

及半径 R 无关, 试求解指数 p 。

C. 6 在 C.5 所述的双星系统中, 发射的引力波的振幅与 $\omega^2 R^2$ 成正比。下图定性地展示了该双星碰撞前观测到的四种不同引力波的时变波形图, 请从(a)至(d)中选择最符合情况的波形图。



观测到的引力波信号波形图

提示:

C. 1: 钟-F 处于惯性参考系中, 而钟-II 则不是。我们使用另一个自由下落参考系 II' 中的钟-II' 作为钟-II 的瞬时惯性参考系, 而从钟-F 观测钟-II' 时可利用洛伦兹变换。

C. 2: 直接将题干所给的等效光速代入再进行小量近似即可。

C. 3: C.2 所求简化结果对应于 $\Delta t_{\max}$, 注意小量近似时 x_N 符号相较于 x_E 已经发生改变, 再次小量近似计算即可得到结果。

C. 4: 通过泰勒展开近似求出 ε , 再根据图估算出 $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$, 代入 C.3 的结果即可求出 $M_{WD}/M_{\odot}$ 。

C. 5: 简单的万有引力定律中圆周运动模型, 然后直接公式类比, 可得到开普勒第三定律的简化

结果。

C. 6: 求出圆轨道运动的机械能表达式, 根据能量减少得到角速度与半径的变化情况, 从而知振幅变化情况。

背景及补充知识

魏茨泽克-贝特(Weizsäcker-Bethe)质量公式: 题目中给出的结合能公式(1), 通常被称为魏茨泽克-贝特(Weizsäcker-Bethe)质量公式, 为一个半经验公式, 它是原子核液滴模型最著名的成果。原子核液滴模型(Liquid Drop Model, LDM)是描述原子核基本性质和行为的半经验模型, 它将原子核类比为不可压缩、带电荷的液滴。这个模型在核物理发展史上具有里程碑意义, 它能够相当成功地解释原子核的结合能、质量、稳定性、裂变现象等关键特征, 尤其对理解核裂变机制至关重要。贝特(Hans Bethe)和魏茨泽克(Carl Friedrich von Weizsäcker)在 1935 年独立提出了半经验质量公式:

$$B(Z, N) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A} \pm a_p A^{-\frac{1}{2}}$$

该公式通过几个物理项来近似计算原子核的结合能(B)或质量(m), 每一项都对应液滴模型的一个特征:

第一项是体积能: 这是最主要的一项, 由于核力的短程性和饱和性, 每个核子在核物质内部受到的吸引作用大致相同(除了表面核子)。因此, 结合能正比于核子总数 A (质量数)。类似于液滴的汽化热或结合能, 正比于液滴的体积(即分子总数)。

第二项是表面能: 位于原子核表面的核子, 其核力结合没有被完全饱和(可以理解为周围的邻居少了), 因此它们的结合能低于内部核子。结合能的减少量正比于表面积, 由于核半径 $R \propto A^{1/3}$, 故表面积 $\propto A^{2/3}$ 。类似于液滴的表面能, 正比于表面积。

第三项是库仑能: 质子间的库仑斥力削弱了原子核的结合。库仑排斥能正比于质子对(质子两两组合)

合) $Z(Z-1)/2$ (近似为 $Z^2/2$),并反比于核半径($R \propto A^{1/3}$)。类似于带电液滴内部电荷间的静电排斥能。

第四项是对称能:这是由泡利不相容原理引起的。在稳定核中,中子数 N 和质子数 Z 倾向于相等($N \approx Z$)。如果中子数过多($N > Z$)或质子数过多($Z > N$),额外的中子(或质子)必须填充到更高的能级(费米能级之上),导致系统能量升高,结合能降低。偏离 $N=Z$ 的程度用 $(N-Z)/(A-2Z)$ 表示。能量修正项正比于 $(N-Z)^2$,一般将之除以 A 以反映其平均效应。

第五项是配对能:实验观察到,质子数 Z 和中子数 N 都是偶数的核(偶偶核)最稳定,奇 A 核(奇偶核)次之,奇奇核最不稳定(自然界还是有稳定的奇奇核,如氘、 Li^6 等)。这是因为核子倾向于成对(自旋相反)以降低体系的能量。配对能是一个较小的修正项。

魏茨泽克-贝特(Weizsäcker-Bethe)质量公式是一个半经验质量公式,它能够相当准确地拟合几乎所有已知原子核的质量(结合能),揭示质量随 A 和 Z 变化的系统规律。对于给定的质量数 A ,存在一个最稳定的质子数 Z ,使得结合能最大(质量最小)。液滴模型(主要通过对称能项)成功预言了原子核的 β 稳定线(在核素图上连接稳定原子核的曲线),即稳定核倾向于满足 $N \approx Z$ (轻核)或 $N > Z$ (重核)。对于重核(如铀、钚),库仑排斥力(随 Z^2 增大)的增长速度超过了核力的表面张力(随 $A^{2/3}$ 增大)。当 Z^2/A 超过一个临界值(约45~50)时,库仑斥力占主导,原子核变得不稳定,倾向于分裂成两个中等质量的碎片(裂变),以大幅降低库仑势能(两个小球的库仑势能远小于一个大球)。

液滴模型还清晰地描绘了裂变过程:原子核首先发生形变(如从球形变为椭球),表面能增加(表面积增大),库仑能降低。在形变过程中存在一个能量极大值点(鞍点),即裂变势垒。势垒高度决定了裂变发生的概率(自发裂变半衰期)。液滴模型成功解释了为何只有重核才能发生裂变,以及裂变碎片的质量分布趋势。简单的液滴模型预测裂变倾向于产生两个质量相近的碎片(对称裂变)。虽然实际观察到的分布更复杂(如铀-235热中子裂变呈双峰

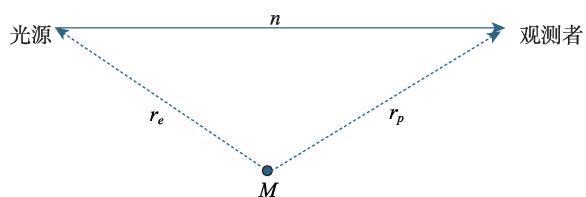
分布),但液滴模型为理解这一现象提供了基础框架(更精细的模型需要考虑壳修正等)。

尽管液滴模型非常成功,但它忽略了原子核的壳层结构和独立粒子运动,这导致它在某些方面存在不足:1.幻数附近原子核(质子数 Z 或中子数 N 接近幻数(2, 8, 20, 28, 50, 82, 126)的原子核)的偏差(幻数对应于满壳层,当一个核子层被填满时,要激发这个原子核或从中拿走一个核子需要额外的能量,这个额外的能量被称为壳修正能。这类似于原子电子壳层理论),2.裂变势垒的细节(裂变势垒是指原子核特别是重核从它的基态形状演化到发生裂变所必须克服的能量势垒,势垒高表示自发裂变概率极小,原子核相对稳定,势垒低或者小于零,原子核会发生裂变,无法在自然界中存在。液滴模型中,势垒高度与 Z^2/A 相关,但壳层效应会影响势垒高度,如双幻数核 Pb^{208} 特别稳定,与液滴模型预测的不符),3.基态形变(基态形变是指原子核在基态时并非总是球形,特别是质子数和中子数远离幻数时)。

中子滴(neutron drip):当物质密度或压力达到特定阈值时,中子从原子核中“滴落”出来,形成自由中子与原子核混合的状态,称为中子滴。

在正常物质中,中子被核力束缚在原子核内。但当物质处于极高密度(如白矮星演化末期或中子星形成初期)时,引力或压力会急剧增加:电子被压入质子形成中子(电子与质子反应生成中子和中微子),导致中子数量大幅增加;过多的中子会超出原子核的束缚能力(核力的作用范围有限),多余的中子便会像液体“滴”一样脱离原子核,成为自由中子。这种状态下的物质由自由中子、少量原子核及微量电子组成,是介于普通核物质与完全中子简并态(如中子星核心)之间的过渡状态。故中子滴过程本质是强相互作用与泡利不相容原理竞争的结果——当增加中子带来的费米简并压增益无法抵消排斥势时,系统达到中子饱和临界态。中子滴的研究对理解致密天体(如中子星)的结构、演化及极端条件下的核物理规律具有重要意义。

夏皮罗延迟(Shapiro time delay):又称为引力时间延迟效应(gravitational time delay),是爱因斯坦广义相对论的一个重要预言。它描述了光(或任何电磁波信号)在引力场中传播时,由于时空弯曲而导致信号传播时间增加的现象。简单来说,当光经过一个大质量天体(如太阳)附近时,它的路径会因引力而弯曲,同时传播所需的时间会比在平直时空中更长,即使考虑到路径弯曲导致的额外路程,仍然存在一个纯粹的、由引力势本身引起的额外时间延迟。在信号路径经过中心天体附近时夏皮罗延迟的近似计算为:



光线在质量为 M 的引力体附近从光源传播到观测者

科苑快讯

天文学家发现一颗土星大小的流浪行星

天文学家终于对一颗流浪行星称重,发现它与土星质量相当,在一次剧烈的行星分裂后被扔进了银河系。虽然大多数行星围绕一颗或多颗恒星运行,但越来越多的证据表明一些行星独自在银河系中运行,它们被称为自由漂浮行星或流浪行星。

迄今为止的很多研究,揭示了行星被驱逐出其母星系并在星际空间漂流的多种方式。美国宇航局(NASA)计划于2027年发射南希·格蕾丝·罗马太空望远镜(Nancy Grace Roman Space Telescope),这将提高自由漂浮行星的发现速度。

用于流浪行星发出的光线微弱,天文学家通常只有在其引力短暂弯曲并放大远处背景恒星的光时才能探测到它们。这种效应被称为微透镜(microlensing),其主要缺点是通常不能显示行星的距离,这就不能确定其质量,这些流浪行星的许多基本性质也就难以确定。

不过,有个研究组在一次短暂的微透镜事件中发

$$\Delta t = \frac{2GM}{c^3} \ln \frac{r_p + r_p \cdot n}{r_e + r_e \cdot n}$$

其中 r_e 表示信号发射点(如地球)到中心天体 M 的最近距离(在最小距离近似下), r_p 表示信号反射点或接收点(如行星、航天器)到中心天体 M 的最近距离, n 表示发射点到接收点的单位矢量。夏皮罗延迟与光线偏折是两个独立的效应,前者并非由后者引起的,就如同同一个硬币的两面,都是光在弯曲时空中沿测地线运动的体现。偏折描述的是空间路径的弯曲,延迟描述的是时间流逝的变化(从远处观测者的角度看)。

* * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答发送至 ao-sai@ihep.ac.cn 邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。

现的一颗流浪行星,是在地球和太空同时观测到的。该团队将几次地面调查的数据与盖亚太空望远镜的观测结果结合起来。光信号到达这些相隔很远的地方的时间上的微小差异,使科学家们能够计算出微透镜视差。当这项测量与有效源点透镜建模(finite-source point-lens modeling)相结合时,研究人员能够确定这颗行星的质量及其在星系中的位置。

这颗行星的质量约为木星的22%,距离银河系中心约3000秒差距。研究人员认为,其质量与土星相似,很可能是作为行星系统的一部分形成的,而不是像小恒星或褐矮星那样自行形成。他们还认为,像这样的低质量流浪行星是在恒星周围诞生的,后来由于引力干扰,比如与其他行星或不稳定恒星同伴的近距离接触,被抛出了原来的轨道。

(高凌云编译自2026年1月1日SciTechDaily网站)