美国各大学 1984 年在华招收物理研究生试题参考答案

A．经典物理解

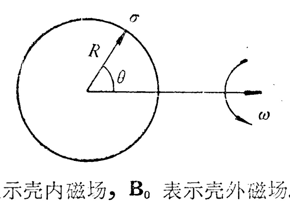
1．球 1．$L_1 = MRv_1' + Iw_1' = MRv_1'' + Iw_1''$

$$= v_1''\left(MR + \frac{I}{R}\right)$$

球 2．$L_2 = v_2''\left(MR + \frac{I}{R}\right)$

摩擦"损失"/初始能量＝20/49

2．



令 $\mathbf{B}_i$ 表示壳内磁场，$\mathbf{B}_0$ 表示壳外磁场．

(a) 边界条件：

B 的法向分量连续 $B_{ir} = B_{or}$ (B_r≡径向分量)

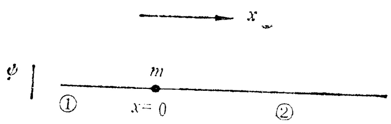
B 的切向分量经过表面的改变量为 $j\frac{4\pi}{c}$

$$B_{o\theta} - B_{i\theta} = \frac{4\pi}{c}\sigma\omega R\sin\theta \quad cgs\ 单位制.$$

(b) 通过检验，在壳内为均匀场和壳外为偶极子场满足边界条件

$$F = \frac{8\pi}{3c}\sigma\omega R \quad 即为均匀场的大小.$$

3．



在区域 1：$\psi_1 = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$，式中

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\frac{\mu}{T}}$$

在区域 2：$\psi_2 = Be^{ikx}$

(a) 反射部分 $= (A)^2 = \dfrac{m^2\omega^4}{m^2\omega^4 + 4T^2k^2} = \dfrac{m^2\omega^4}{m^2\omega^4 + 4T\mu\omega^2}$

(b) 只要 $l \ll \lambda$ 以上的计算就适用

式中

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad 因此 \quad l \ll \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

4．(a) S 开启时，$I_2 = 0$，$I_1 = \dfrac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}}$

(b) S 闭合时，

I_2 的振幅 $= (\omega MV_0)/\{[\omega L_1(R + R_2) + \omega L_2 R_1]^2 + [\omega^2(M^2 - L_1L_2) + R_1(R_2 + R)]^2\}^{1/2}$

(c) 理想变压器情形 $R_1 = R_2 = 0$，$M = L_1L_2$

$$I_2 = \frac{\omega MV_0}{\omega L_1 R} = \frac{M}{L_1}\frac{V_0}{R}$$

但是 $M \sim N_2N_1$ $L \sim N_1^2$ N_1，N_2 为匝数．于是得

$$I_2 = \frac{N_2}{N_1}\cdot\frac{V_0}{R}.$$

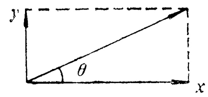
正是所预期的，因理想变压器变 V_0 为 $\dfrac{N_2}{N_1}V_0$.

5．(a) 令非偏振光部分在任何方向上的强度为 I_u，而椭圆偏振光部分在 x，y 轴方向上的分量分别强度为 I_{ex} 和 I_{ey}．在任何角度 θ 情形，非偏振光部分仍为 I_u，但是对于偏振光部分有

$$E_\theta = E_x\cos\theta + E_y\sin\theta$$

与 I_u 无关.

(b) 通过一个$\frac{\lambda}{4}$波长片，x 相对于 y 有 90° 位相差，变椭圆偏振光为平面偏振光



在 30° 的极大强度 $\Rightarrow I_{ex} + I_{ey} + I_u = 1.75I_0$.

故入射光强中的非偏振光占

$$\frac{2I_u}{1.5I_0 + I_0} = \frac{1.5I_0}{2.5I_0} = 0.60.$$

6．(a) 在无穷小卡诺循环时所作的功是

$$dW = dP(\triangle v),$$

式中 $\triangle v$ 是体积的改变．从液体膨胀为气体所提供的热量为 $Q = L$，式中 L 是潜热.

由热力学第二定律知

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(\triangle v)}.$$

(b) 应用以上方程，并假设 L 为常数

$$T_m = \frac{T_0}{1 + \dfrac{RT_0}{L}\log\dfrac{P_0}{P_m}}$$

7．　$\theta_0 = 0$，π

和 $\cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2 R}$　对于 $\omega^2 R > g$ 情形.

(b) 令 $\theta = \theta_0 + \delta$

$$mR^2\ddot{\delta} - m\omega^2R^2\cos^2\theta_0\delta + mgR\cos\theta_0\delta = 0$$

对于 $\theta_0 = 0$，π．得

$$\ddot{\delta} + \left[\pm\frac{g}{R} - \omega^2\right]\delta = 0 \quad 式中 \quad \begin{matrix} + & \theta_0 = 0, \\ - & \theta_0 = \pi. \end{matrix}$$

很明显，$\theta_0 = \pi$ 总是不稳定的，

$\theta_0 = 0$ 在 $g > \omega^2 R$ 条件下是稳定的，在此点附近作小振荡的频率为

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}.$$

对于 $\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$

当 $\omega^2 > g^2/\omega^1 R^2$ 或 $\omega^2 R > g$ 时，这是稳定的，于是，当

$\omega^2 R > g$ 时，$\theta_0=\cos^{-1}\frac{g}{\omega^2 R}$ 是稳定的，在此点附近作小振荡的频率为

$$\omega_\delta=\sqrt{\omega^2-\frac{g^2}{\omega^2 R^2}}$$

B. 近代物理解

1.（a）氢原子的基态本征函数

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$$

由微扰论求得的能量移动

$$\triangle E=\int|\psi|^2(\triangle H)d^3 r$$

式中 $\triangle H$ 是微扰势

$$\triangle H=V'-V$$

式中 $V=-\frac{e^2}{r}$ 正常的库仑势能

和

$$\begin{cases} V'=-\frac{e^2}{r} & r>R \\ V'=-\frac{e^2}{R}-e^2\int_r^R\frac{dr}{R^3} & r<R \end{cases}$$

在这里我们用到在半径为 R 的球内的场是 $\frac{er}{R^3}$

$$V'=-\frac{e^2}{R}-\frac{e^2}{R^3}\left(\frac{R^2-r^2}{2}\right)=-\frac{3}{2}\frac{e^2}{R}+\frac{1}{2}\frac{e^2r^2}{R^3}.$$

$$\triangle E=\int_0^R\frac{e^{-2r/a_0}}{\pi a_0^3}\left[\frac{e^2}{r}-\frac{3e^2}{2R}+\frac{1}{2}\frac{e^2r^2}{R^3}\right]4\pi r^2dr$$

因为

$$R\ll a_0\qquad e^{-2r/a_0}=1.$$

E_0为基态能.

（b）

$$\triangle E=13.6\left(\frac{10^{-13}}{0.53\times10^{-8}}\right)^2\frac{4}{5}=3.9\times10^{-9}\text{ 电子伏.}$$

2.（a）

本征矢为

$$\left[\frac{1}{A^2+(B\mp\sqrt{A^2+B^2})^2}\right]^{1/2}\begin{pmatrix} A_i \\ B\mp\sqrt{A^2+B^2}\end{pmatrix}$$

（b）假设系统是处在态

$$\frac{\lambda}{\hbar}=+\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$$

使 S_y 对角或 σ_y 对角得几率

$$=\frac{1}{2}\frac{A^2+B^2+(A-B)\sqrt{A^2+B^2}}{[A^2+B^2-B\sqrt{A^2+B^2}]}.$$

3（a）P 态具有与 S 态，D 态相反的宇称，如果宇称是守恒的，则就不能有相反宇称的混合.

（b）G 态有 $l=4$，宇称虽然是对的，不过我们不能将 $l=4$ 和两个自旋 $\frac{1}{2}$ 的组成 $J=1$ 的态.

（c）$\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$

$$\frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu_0}=\left\{\frac{[g_L\mathbf{L}+g_S\mathbf{S}]\cdot\mathbf{J}}{J(J+1)}\right\}\mathbf{J},\quad \mu_0\equiv\text{核磁子}$$

$$\mu=\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{\mu_p-\mu_n}{2}\right)\right]\mu_0$$

$$=\left[\frac{3}{4}-\frac{(2.79-1.91)}{2}\right]\mu.$$

$\mu=0.31\mu.$

4.（a）位相差

$$\beta=\frac{M^2g\lambda S^2}{2\pi\hbar^2}\sin 2\theta\sin\phi$$

$$K=\frac{M^2g}{2\pi\hbar^2}.$$

（b）$\lambda=1.45$ Å

$$\text{动能}=\frac{P^2}{2M}=\left(\frac{2\pi\hbar C}{\lambda}\right)^2\frac{1}{2MC^2}=0.039\text{ 电子伏}$$

（c）从 $\sin\phi=-1$ 变化到 $\sin\phi=+1$ 测得极大的数目为

$$N=\frac{2}{2\pi}\left[\frac{M^2g\lambda S^2}{2\pi\hbar^2}\right]\sin 2\theta$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^2}(M^2C^4)\left(\frac{S}{\hbar C}\right)^2\frac{\lambda g}{C^2}\sin 2\theta$$

$$=20.6$$

5.（a）

$$\frac{\text{衰变数}}{\text{年}}=\frac{3.34\times10^{33}}{10^{32}}=33.4\frac{\text{衰变}}{\text{年}}.$$

（b）首先计算 π^0 的能量.

$$E_{\pi^0}=\frac{M_P^2+M_{\pi_0}^2+M_e^2}{2M_P}=479Mev.$$

计算

$$\gamma_{\pi^0}=\frac{479}{135}=3.548$$

$$\gamma\beta_{\pi^0}=\sqrt{\gamma_{\pi_0}^2-1}=3.404,\quad \beta_{\pi^0}=0.9595$$

$$E_{\gamma\text{极大}}=\gamma_\pi\frac{M_{\pi^0}}{2}[1+\beta_{\pi^0}]=469.3Mev$$

$$E_{\gamma\text{极小}}=\frac{\gamma_\pi M_{\pi^0}}{2}[1-\beta_{\pi^0}]=9.7Mev.$$

6.在麦克斯韦-玻尔兹曼极限的理想气体的 N_A 个分子的配分函数

$$Z=\frac{z^{N_A}}{N_A!}=\frac{(z_{\text{平动}}z_{\text{转动}}\cdots)^{N_A}}{N_A!}$$

现在考虑极限情形：

（a）$kT\gg\hbar^2/I$

$$z_{\text{转动}}=\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)e^{\frac{-\beta J(J+1)\hbar^2}{2I}}$$

$$=\int_0^\infty(2J+1)e^{-\beta(J)(J+1)\hbar^2/2I}dJ$$

$$z_{\text{转动}}=\int_0^\infty d\xi e^{\frac{-\beta\hbar^2\xi}{2I}}=\left(\frac{2I}{\hbar^2\beta}\right)=\frac{2IkT}{\hbar^2}$$

$$E_{\text{转动}}=-N_A\frac{\partial\ln z_{\text{转动}}}{\partial\beta}=N_A\frac{\partial\ln\beta}{\partial\beta}=\frac{N_A}{\beta}=N_AkT$$

$$C_{\text{转动}}=\frac{\partial E_{\text{转动}}}{\partial T}=N_Ak$$

熵

$$S_{转动}=kN_A\ln\left(\frac{2IkT}{\hbar^2}\right)+kN_A=kN_A\left(1+\ln\frac{2IkT}{\hbar^2}\right)$$

(b) $kT\ll\hbar^2/I$

$$E_{转动}=\frac{3N_A\hbar^2}{I}e^{-\frac{\hbar_2}{IkT}}$$

$$C_{转动}=\frac{\partial E_{转动}}{\partial T}=\frac{3N_A\hbar^4}{I^2kT^2}e^{-\frac{\hbar_2}{IkT}}。$$

$$S_{转动}=kN_A\ln z_{转动}+\frac{E_{转动}}{T}$$

$$\approx\frac{3N_A\hbar^2}{IT}e^{-\frac{\hbar_2}{IkT}}.$$

C. 杂 题 解

1.(a)

$$dP=\frac{1}{\nu_0}\left(\frac{MC^2}{2\pi RT}\right)^{1/2}e^{-\frac{MC^2(\nu-\nu_0)^2}{2RT\nu_0^2}}d\nu$$

(b) 多普勒展宽

从 (a) 得 $\Delta\lambda=8.1\times10^{-3}$ Å

(c) 平均自由程，$\Lambda=\frac{1}{n\sigma}$

以 mks 单位制表示：$\sigma\approx\pi r^2$，式中 $r\approx10^{-10}$ 米

$$\sigma\approx3\times10^{-20}\ 米^2$$

$$n=\frac{P}{RT}\times6.02\times10^{23}=2.04\times10^{23}\ \frac{分子}{米^3}$$

所以

$$\Lambda=\frac{1}{(3\times10^{-20})(2\times10^{23})}=1.7\times10^{-4}\ 米$$

平均碰撞时间 $\tau=\frac{\Lambda}{v}$，$\tau\approx4\times10^{-7}$ 秒.

$$\Delta\lambda=3\times10^{-5}\ Å$$

2. (a)

$$R=\frac{9\pi\times10^{-6}}{6\times10^{-4}}=0.0471\ 欧姆$$

电压$=Ri=0.0471\times7960=375$ 伏

功率$=VI=375\times7960=2.99\times10^3$ 千瓦

$$W=\frac{功率}{\rho C\Delta T}=\frac{2.99\times10^3\times10^3\ 千伏/瓦}{1\times4190\times40}=17.8升/\cdot秒$$

(c) 压力$=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{(0.25)^2}{2(4\pi\times10^{-7})}$

$$=2.49\times10^4\ 牛顿/米^2$$

(d)

$$I=I_{极大}(1-e^{-t/\tau})$$
$$e^{-t/\tau}=0.01$$
$$t=\tau\ln(100)=2.17\ 秒.$$

4. (a) 除了源之外，在真空中无单极子

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho\qquad\nabla\cdot\mathbf{B}=4\pi\rho_m$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{C}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\frac{4\pi}{C}j_m$$

$$\Delta\times\mathbf{B}=\frac{1}{C}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi\mathbf{j}}{e}$$

(b) $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{C}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\frac{4\pi\mathbf{j}_m}{C}$

$$Q = -\frac{4\pi N n q_m}{RC}$$

$$I = -\frac{4\pi q_m N_n}{LC}$$

几率为 $\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0.132$

$N = \frac{P_f(1-P_f)}{(\triangle P_f)^2} = \frac{3/4(1/4)}{(0.0025)^2} = 30000$ 衰变.

$$\lambda = \frac{V_0}{2\ln R/r_0}$$

$t_0 = \frac{1}{2}\frac{r_0}{W(2\lambda/r_0)} = \frac{1}{2}$（漂移$r_0$距离的时间）

(b)

$$Q = \frac{Q_i}{2\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)}\ln\frac{(t+t_0)}{t_0}$$

上式仅适用于 $r_i = R$ 或

$$t \leqslant \frac{R_0^2}{K} - t_0$$

从此以后 $Q = Q_i$.

（崇光、维兴译）