美国弗吉尼亚理工学院州立大学物理系1979年在我国招考研究生4小时考试试题参考答案

（试题见本刊80年第2期）

1）A 答　实验上测量磁化率的仪器有磁天平（亦称磁秤）、振动样品磁强计等，精确度较高的是磁天平（如图1所示）．其原理是通过测量具有确定磁矩的样品

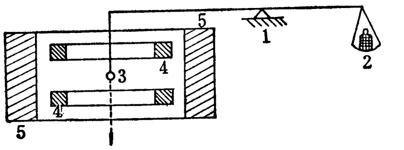

图1　磁天平示意图

1.精度较高的天平支点，2.天平的法码端，3.悬挂在天平另一端的样品，4.产生均匀梯度磁场的线圈，它使样品在 z 轴方向受力：$F_z = M_z \dfrac{\partial H_z}{\partial z}$，$M_z$ 和 $\partial H_z/\partial z$ 分别是磁矩和梯度磁场在 z 方向上的分量，5.产生均匀磁场的线圈（一般是绕在铁芯上），它使样品顺磁磁化

在均匀梯度磁场中受的力，求出磁化率．改变样品温度，重复测量它的受力大小，就可得到磁化率跟温度的关系．泡利磁化率始源于对电子气顺磁性的研究．1927年泡利首先用量子理论，研究电子气（自由电子组成）的顺磁性，用费米-狄拉克统计取代玻耳兹曼统计．指出，由于自旋效应导致电子气的顺磁磁矩 M_p 在低温条件下（即 $KT \ll \varepsilon_0$，K 是玻耳兹曼常数），满足下式：

$$M_p = 3N\mu^2 H/2\varepsilon_0 \tag{1}$$

或 $x_p = 3N\mu^2/2\varepsilon_0$，其中下标 p 表示顺磁，μ 是玻尔磁矩，N 是自由电子的数目，ε_0 是完全简并时电子的最大能量，H 是外磁场强度，x_p 就是电子气的顺磁磁化率，亦称泡利磁化率．1934年布洛赫进一步指出，在有限温度下，电子气的泡利磁化率应是

$$x_p = \frac{3N\mu^2}{2\varepsilon_0}\left\{1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{KT}{\varepsilon_0}\right)^2\right\} \tag{2}$$

这就是泡利磁化率依赖于温度变化的基本公式．金属里的电子高度简并，内层电子是饱和结构，外层价电子（即载流子）可以认为是准自由电子，它的最大能量就是金属的费米能量．因而自由电子气的顺磁性量子理论也完全适用于金属的载流子．金属的泡利磁化率，便是那些费米面附近的准自由价电子组成的电子气的顺磁磁化率，它满足公式（2），而 ε_0 是金属的费米能量（一般是几个电子伏特）．

为简便起见，我们选用某碱金属（外层只有一个价电子）作为样品，用磁天平测量它在不同温度下的受力，求出磁矩，从中减除逆磁磁矩（它等于顺磁磁矩的三分之一）之后，就得到该碱金属的泡利磁化率依赖于温度的关系．可以预期，所得结果如图2．（何　炬）

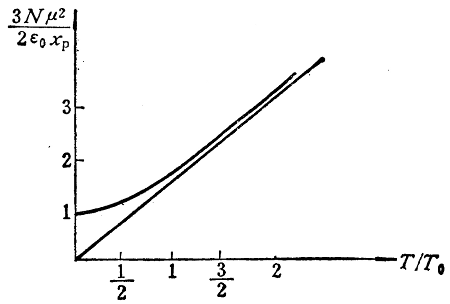

图2　金属的泡利磁化率对温度的依赖曲线
（图中直线表示经典统计给出的结果）

B.答　在问题2中讨论的体系是一个电子和一个氧核构成的七价氧离子 O^{+7}．这是一个类氢离子，它的光学性质可以从量子力学得到精确预言（理论计算和实验结果符合在 10^{-7} 以内）．由于弱相互作用，使它处于 $1s$ 和 $2p$ 的叠加状态中，测量能级时，它有一定几率处于 $1s$ 态，也有一定几率处于 $2p$ 态．这两个态是宇称相反的．可以通过下述实验来证实这体系确实既处于 $1s$ 态，又处于 $2p$ 态中．

我们找一标准的连续谱光源，把观测样品置于透明盒子中，用连续谱光源照射，后面置一摄谱仪，把有样品和没有样品的频谱测出，相互对照就可以得到样品的吸收光谱．如果离子 O^{+7} 初始处于 $1s$ 态，受到连续谱光源照射后，按电二极矩选择定则：初末态角量子数之差 $\Delta l = \pm 1$，能够使电子从 $1s$ 能级跳到 $2p$，$3p$，$4p$，$\cdots$ 能级，这就是束缚态⟶束缚态跃迁，形成一组吸收线系，类似氢原子的巴尔末线系．同时也能使电子从 $1s$ 能级跳到连续态，即束缚态⟶自由态的跃迁，这跃迁形成一个连续吸收谱．线吸收系数和连续吸收系数示意图如图3：

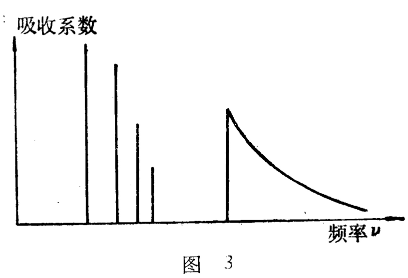

图　3

电子的能级图如图4所示．由连续谱吸收界位置，以及线吸收谱位置，都可以判断电子是从那一个能级开始起跳的．对于处于 $2p$ 态的电子，也有类似的线吸收谱和连续吸收谱．和 $1s$ 不同的是，在 $2p$ 态的电子，按 $\Delta l = \pm 1$ 规则，可以跳到 $3s$，$3d$，$4s$，$4d$，$\cdots$ 线的数目多一倍．也可以根据连续吸收界位置或这一组谱线

位置独立算出电子初态能级数值．因此，通过样品的吸收谱得到的初态能级数据和量子力学预言的比较，可以准确地判断初态是否包含相反宇称混合物 $2p$ 态，通过吸收谱强弱对比，还可以进一步推算出体系处于 $2p$ 态的相对几率．　　　（宋　燠）

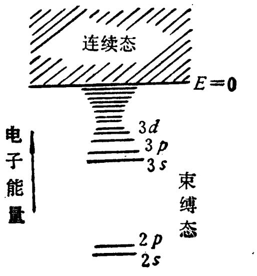

图 4

C. 答　光是电磁波谱的一个组成部分，电磁波谱中的所有波在本质上都是电磁的，在自由空间中的各种电磁波传播速率 c 都相等．因此，只要我们测得某种电磁波在自由空间的传播速率，即测出了光的速率．

利用电磁空腔中电磁共振形成驻波的原理，我们可用“微波空腔方法”对光速进行测量：

取一段矩形波导，用两个金属盖把两端封闭起来，就做成了一个电磁共振腔（见图 5）

测定 c 值的步骤是，先测出该矩形腔的宽度 a 和长度 l，然后把该空腔调谐到共振，这时就可测出导波波长 $\lambda_g = 2l/n, n = 1, 2, 3\cdots$． n 是空腔中驻波所含半波的个数．根据自由空间的波长 λ 和 λ_g 的关系：

$$\lambda = \frac{\lambda_g}{\sqrt{1+(\lambda_g/2a)^2}}$$

可计算自由空间的波长 λ，再由实验测出腔共振频率 f_r 后，就可根据 $c = \lambda f_r$ 求出速率 c．若把以上关系写在一起，就有：

$$c = \lambda f_r = \frac{\lambda_g}{\sqrt{1+(\lambda_g/2a)^2}} f_r = \frac{2l}{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\ l\ /an)^2}} f_r$$

从上式可看出，该法测出的光速的精确度取决于对共振腔尺寸 a 和 l 测量的精确度以及实验测得的共振频率 f_r 的精确度．例如，当测得的数据为 $a = 2.67$ 厘米，$l = 15.64$ 厘米，$f_r = 9.50 \times 10^9$ 周/秒，$n = 8$ 时，则代入上式，此时我们测到的电磁波的速率，也即光的速率为 $c = 2.99 \times 10^8$ 米/秒．

如果我们期望所测出的光速精确度有 5 位有效数字，那么对腔的尺寸和共振频率的测量精确度也必须相应的提高．例如，若测得的数据为 $a = 2.6732$ 厘米，$l = 15.6457$ 厘米，$f_r = 9.4983 \times 10^9$ 周/秒，$n = 8$，那时测出的光速就是 $c = 2.9984 \times 10^8$ 米/秒．实验室测光速的方法很多，以上是其中的一种．（陈文祥）

D.答　全息图是全息照相术中使用的特殊照相底板；当这种负片显影后，从后面用一束相干的气体激光束照明时，它在空间产生一个三维的图象（立体图象）．

产生全息图（全息照相）的基本原理如下：全息图所要记录的并不是物体的像而是物体光波本身．所以后来即使物体已经移去，只要照明这个全息图，就能实现“再现”原始物体光波．这样，用眼睛观察这个再现

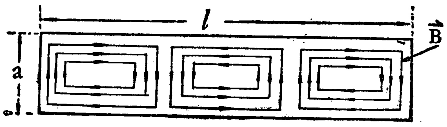

图 5　共振腔由一段波导作成（俯视图）
图中表示 $n = 3$，E 线未画出

的波前，就能看到这个物体的图象，它与原始的物体实际上不可分辨．全息照相的基本概念是一个二次绕射过程．被一个物体绕射产生的场可以表示为物体上光分布的富里叶变换．第二次绕射就成为物体富里叶变换的一个富里叶变换，它就是物体本身的一个像．这就是说，由全息图上发生的绕射将复制出物体光波，只要这两次绕射的全部振幅和位相都保持不变．为达到此目的，把一束单能的、相干的和高度准直的激光束分成两条光束（通常用参考镜子）．一条直接投射到涂

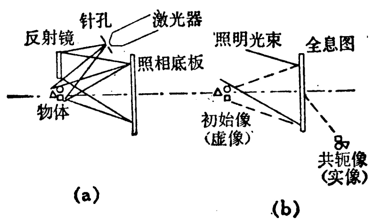

图 6　(a) 全息图的记录；
(b) 重现原始物体光波

有高分辨本领的感光乳胶的照相底板上．另一条则投射到想要拍摄的物体上（参看图 6），它被散射或绕射到用于拍摄的照相底板上，并且与第一条参考光束组成一个干涉图形（而不是像普通照相负片那样只收集光，使受光位置呈暗像）．原来被拍摄的物体可以用相干的光束（一般是利用拍摄时所用的同一激光器的光束）从后面照射全息图来再现出来．此时，全息图就像绕射光栅一样，除了产生直接透射光波外，还产生两束绕射光波，其中一束精确地复制出原始的物体光波．观察这个重现的波前，就能看见原始物体的一个精确的复型，虽然在重现过程中物体并不存在．另一束则给出一个立体的虚像．　　　（杜远才）

2) A 答　类氢原子的 H_0 为：

$$H_0 = \boldsymbol{p}^2/2m_e - Ze^2/r,\quad r = |\boldsymbol{r}|$$

H_w 已在题中给出，为：

$$H_w = -\kappa e\{\phi(r)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi(r)\}/2m_e c$$

在空间反演下，

$$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r},$$
$$t \to t,$$
$$\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p},$$
$$\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\sigma},$$

所以
$$H_0 \to \frac{1}{2m_e}(-\boldsymbol{p})^2 - \frac{Ze^2}{|-\boldsymbol{r}|} = H_0$$

$$H_w \to \frac{-\kappa e}{2m_e c}\{\phi(|-\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\boldsymbol{p})$$

$$+\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\boldsymbol{p})\phi(|-\boldsymbol{r}|)\} = -H_w$$

由此可见，在空间反演下，H_0不变，H_w反号，两者的行为正好相反．下面解释为什么H_w会把H_0的具有不同宇称的本征态混合起来．

前已证明，H_0在空间反演下不变，所以，H_0与宇称算子P对易，它们可有一整套完备的共同本征态，记它们为$\{|\phi^{\alpha_i}_{E^0_i,\eta_i}\rangle\}$，其中$E^0_i$，$\eta_i$分别表示$H_0$及$P$的本征值，$\alpha_i$表示标记态所必需的其它量子数．不过，与$H_0$不同，$H_w$在空间反演下反号，不与$P$对易，造成总哈密顿量$H=H_0+H_w$也不与$P$对易．于是，$H$和$P$不可能有一整套完备的共同本征态集合．也就是说，总哈密顿量的本征态中，必定存在不是宇称本征态的态．当将这些态用完备集$\{|\phi^{\alpha_i}_{E^0_i,\eta_i}\rangle\}$展开时，就必然表现为不同宇称的$H_0$的本征态的混合．

此题也可用微扰论解释如下：

我们知道，到H_w的最低阶，H_0的二任意本征态的混合，由H_w在此二本征态间的矩阵元$\langle\phi^{\alpha_2}_{E^0_2\eta_2}|H_w|\phi^{\alpha_1}_{E^0_1\eta_1}\rangle$决定．由于在宇称算子$P$的作用下，有

$$P\{H_w|\phi^{\alpha_1}_{E^0_1\eta_1}\rangle\} = (-H_w)\eta_1|\phi^{\alpha_1}_{E^0_1\eta_1}\rangle$$

$$=(-\eta_1)\{H_w|\phi^{\alpha_1}_{E^0_1\eta_1}\rangle\}$$

这说明$H_w|\phi^{\alpha_1}_{E^0_1\eta_1}\rangle$的宇称是$-\eta_1$．于是，如果$-\eta_1\neq\eta_2$，此态就与$|\phi^{\alpha_2}_{E^0_2\eta_2}\rangle$正交：

$$\langle\phi^{\alpha_2}_{E^0_2\eta_2}|H_w|\phi^{\alpha_1}_{E^0_1\eta_1}\rangle = 0.$$

由于H_w不是零算子，所以H_w的矩阵元不能都为0，它必定有且只能有联系不同宇称的态的矩阵元，这就意味着、存在着不同宇称的H_0的本征态混合．

B 答　计算$2p$态与$1s$态的混合到b的最低阶．

由类氢原子的H_0给出的能级及波函数为：

$$E^0_n = -m_e Z^2 e^4/2\hbar^2 n^2 \tag{1}$$

$$\psi_{nlms}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)x_s \tag{2}$$

其中

$$R_{nl}(r) = N_{nl}e^{-Zr/na_0}(2Zr/na_0)^l L^{2l+1}_{n+l}\,2Zr/na_0) \tag{3}$$

$a_0=\hbar^2/m_e e^2$ 是玻尔半径

N_{nl}是归一化常数．L^{2l+1}_{n+l}是缔合拉盖尔多项式．x_s是电子的自旋波函数．

由于本题要求的是对b展开到最低阶，故需要先弄清H_w在任意二态间的矩阵元对b的依赖关系．

显然，$I=\langle nlms|H_w|n'l'm's'\rangle$

$$\sim\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x R_{nl}(r)Y^*_{lm}(\theta,\varphi)x^+_s\{\phi\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$$
$$+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi\}R_{n'l'}Y_{l'm'}(\theta,\varphi)x_{s'}\times$$
（与b无关的因子）

将(3)式代入，考虑到$b\ll a_0$，即得

$$I\sim\int_{-\infty}^{\infty}d^3x r^l L^{2l+1}_{n+l}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)Y^*_{lm}(\theta,\varphi)x^+_s\left\{\frac{Ze}{r}e^{-r/b}\boldsymbol{\sigma}\right.$$
$$\left.\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\frac{Ze}{r}e^{-r/b}\right\}r^{l'}Y_{l'm'}(\theta,\varphi)x_{s'}$$

×（与b无关的因子）$+\cdots$（b的非最低次项）

作积分变量变换$\boldsymbol{r}\to b\boldsymbol{r}$，并考虑到$L^{2l+1}_{n+l}\left(\frac{2Zbr}{na_0}\right)\xrightarrow[b\to 0]{}$非零常数，即可得到$I\sim b^{1+l+l'}\times$｛与$b$无关的因子｝

$+\cdots\cdots$（b的更高次项）　(4)

由此可见，若要计算H_0本征态的混合到b的最低阶，只要算到H_w的最低非零阶次即可，因为H_w愈多，b的阶次就愈高．我们知道，到H_w的一阶，$2p$态中混入$1s$态的混合系数K为：

$$K=\frac{\langle n=2,l=1,m,s|H_w|n=1,l=0,m=0,s'\rangle}{E^0_1-E^0_2} \tag{5}$$

由(1)—(3)式，有：$E^0_1-E^0_2=-3Z^2e^2/8a_0$　(6)

$\langle 2,1,m,s|H_w|1,0,0,s'\rangle$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d^3\times\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0\sqrt{3}}e^{-\frac{Zr}{2a_0}}Y^*_{1m}(\theta,\varphi)x^+_s$$
$$\times\left(\frac{-\kappa e}{2m_e c}\right)\{\phi\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi\}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$$
$$\times 2e^{-Zr/a_0}Y_{00}(\theta,\varphi)x'_s$$

取到b的最低阶次，上式成为

$$\frac{-i\kappa e^2Z^5\hbar b^2}{4\sqrt{6}\pi m_e c a_0^4}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x\left(1+\frac{1}{r}\right)e^{-r}Y^*_{1,m}(\theta,\varphi)x^+_s$$
$$\times\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}x_{s'} \tag{7}$$

容易算出：$\int_0^\infty r^2dr(1+1/r)e^{-r}=2$　(8)

$$\int d\Omega Y^*_{1,m}(\theta,\varphi)x^+_s(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})x_{s'}/r=\sqrt{4\pi/3}x^+_s\sigma^{(+m)+}x_{s'}$$
$$=\sqrt{4\pi}\,C(s/2,1m;s'/2) \tag{9}$$

这里C是 Clebsh-Gordon 系数．

将(8)(9)代入(7)式，有$\langle 2,1,m,s|H_w|1,0,0,s'\rangle$

$$=\frac{-i\kappa e^2Z^5\hbar b^2}{\sqrt{6}\,m_e c a_0^4}C\left(\frac{1}{2}s,1m;\frac{1}{2}s'\right) \tag{10}$$

最后，将(10)(6)两式代入(5)式，并应用$a_0=\hbar^2/m_e e^2$，$\alpha=e^2/\hbar c$，得到$2p$态中混进$1s$态的系数为

$$K=8i\kappa\alpha Z^3b^2/3\sqrt{6}a_0^2\;C(s/2,1m;s'/2) \tag{11}$$

$1s$态中混进$2p$态的系数与此完全相同．（朱重远）

（待续）