

宇宙学红移与哈勃参数的确定

蔺是杰 胡 彬

(北京师范大学物理与天文学院 100875)

20 世纪初,爱因斯坦提出的广义相对论为理解宇宙的时空结构提供了理论基础。最初,爱因斯坦根据广义相对论假设了一个静态有限的宇宙模型,并在其引力场方程中引入宇宙学常数以维持宇宙的静止。

然而,1929 年埃德温·哈勃(Edwin Hubble)通过对旋涡星云的观测,发现这些星云实际上是银河系以外的星系,并发现星系的光谱线向红端移动,即宇宙学红移现象^[1]。宇宙学红移 z ,是由于宇宙膨胀导致光波波长被拉长的现象,它与天体的物理运动无关,而是反映了宇宙空间本身的动态变化。宇宙学红移的存在,说明宇宙中的天体正在以一定的速度 $v \approx cz$ (c 为光速)远离我们,其退行速度与距离成正比(图 1):

$$v = H_0 d \quad (1)$$

比例系数 H_0 为哈勃常数,描述当前宇宙膨胀的速率,公式(1)即为哈勃定律。

宇宙学红移和哈勃定律的发现打破了爱因斯坦“静态宇宙”的认知,并推动了宇宙大爆炸理论的发展。这一理论认为,宇宙起源于约 138 亿年前的一个极热、极密的状态,随后经历了快速膨胀和冷却的过程。大爆炸理论不仅解释了宇宙的膨胀,还成功预言了宇宙微波背景辐射的存在,以及轻元素(如氢和锂)的丰度。这些预言的验证使得大爆炸理论成为现代宇宙学的主流理论。

在宇宙学研究中,距离测量是理解宇宙结构和演化的重要手段。由公式(1)哈勃定律可以看出,哈勃常数的测量强烈依赖于对天体距离的精确性和准确性。为了精确测量宇宙的膨胀速率和几何结构,多种测距方法被提出并得到广泛讨论。这些方法包括超新星距离阶梯测距^[2-5]、宇宙微波背景辐射测距^[6,7]、重子声学振荡测距^[8,9]、引力透镜时间延迟测距^[10,11]和引力波测距^[12-14]等。每种方法都有其独特的物理基础和观测优势,同时也面临着不同的系

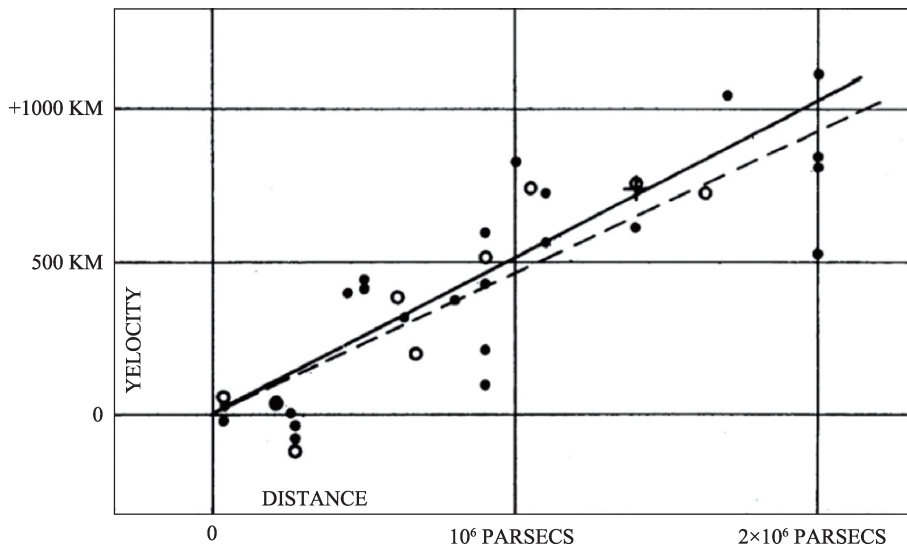


图 1 哈勃测量星系距离和退行速度的关系图^[1]

统误差和理论假设。对这些方法的综合应用和交叉验证,能更准确地测量宇宙的关键参数,如哈勃常数 H_0 ,并进一步完善宇宙学模型。

本文将简要综述这些主要的测距方法,探讨它们的原理以及对哈勃常数测量的贡献。对这些方法的深入分析,将帮助我们更好地描述宇宙的膨胀历史,理解当前宇宙学研究中面临的挑战,如“哈勃常数危机”。

一、宇宙学红移与距离的定义

宇宙学红移本质上是广义相对论导致的引力红移现象^[15,16],即天体相对于观者的退行源于空间的膨胀效应,而非天体本征的相对速度。如图2所示,天体之间本征的距离 $|x_2 - x_1|$ (这个距离称为共动距离)在空间膨胀过程中保持不变,但天体实际的物理距离则随空间的膨胀而增大。空间的膨胀由尺度因子 a 来表征,宇宙三维空间的膨胀即尺度因子 a 随着时间的增长逐渐增大,我们定义当前时刻的尺度因子 a_0 为1。

空间在膨胀,导致 t 时刻天体发射的光谱谱线波长 λ_t 传播到观者,观测到的波长 λ_{obs} 会正比于尺度因子增大(即宇宙学红移现象)。因此,对天体进行光谱测量,可以给出该天体的红移 z ,即 $1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_t} = \frac{a_0}{a_t} = \frac{1}{a_t}$,从而给出 t 时刻宇宙膨胀速度的信息。

但是,宇宙学红移并不直接表征距离。由公式

(1),为了测量哈勃常数值,还需要同时获得该天体的距离信息。由于宇宙的膨胀和距离测量方法的不同,距离的定义并不唯一。在宇宙学中,常见的距离定义包括共动距离、光度距离和角直径距离。共动距离 χ 即为图2中所示的 $|x_2 - x_1|$,在宇宙膨胀的共动参考系中,它不随时间变化;光度距离基于天体的绝对光度 L 和观测到的视亮度 F 之间的关系 $F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$,根据天体发光的绝对光度和观测的视亮度可以求得天体的光度距离;角直径距离则定义为天体的实际物理尺寸 l 与其在天球上观测到的角直径 θ 之间的关系 $d_A = \frac{l}{\theta}$ 。在膨胀宇宙中,同一红移处这三种距离并不相等,如图3所示。它们的互相转换与尺度因子有关,以下是平直空间三种距离的关系式:

$$\chi = a d_L = \frac{d_A}{a}. \quad (2)$$

综上,对于任意天体,精确测量其宇宙学红移以及其在某一定义下的距离,便可以对哈勃常数进行一定的限制。

二、超新星距离阶梯测距

超新星距离阶梯法本质是测量 Ia 型超新星等“标准烛光”的光度距离,进而测得哈勃常数。这一方法结合多级校准的方法,以测量宇宙中遥远天体的距离。使用“距离阶梯”是由于:宇宙中天体的距离范围极其广阔,单一的测量方法无法覆盖如此巨

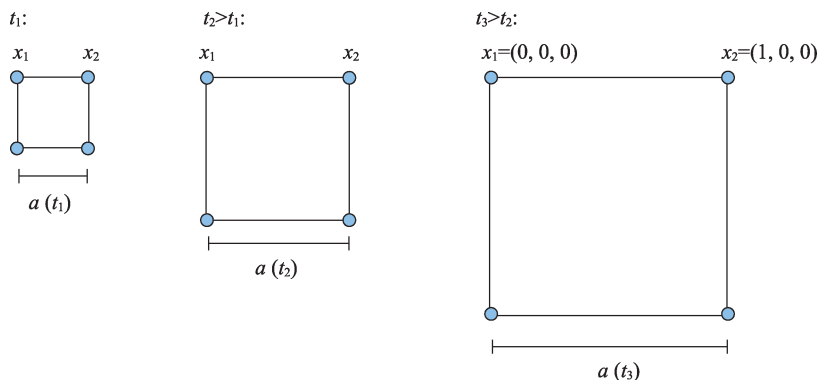


图2 宇宙膨胀的示意图。共动坐标在膨胀过程中保持不变,尺度因子不断增长^[15]

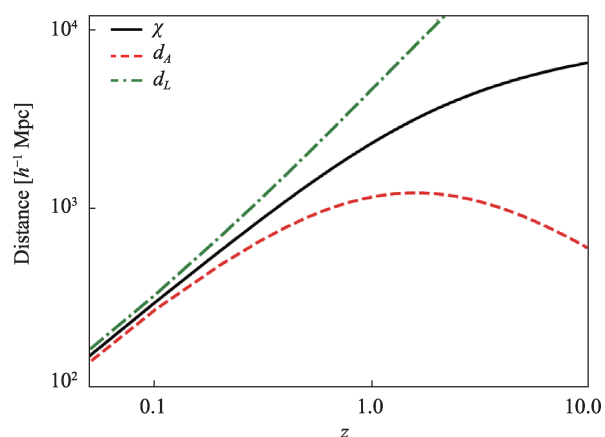


图3 共动距离、光度距离和角直径距离随宇宙学红移的变化^[15]

大的距离尺度,需要通过逐步外推的方式,将已知距离的天体作为基准,校准更远天体的距离,从而构建起一个从近到远的距离测量体系。其核心思想是“由近及远、逐级定标”。例如,一个简单的三级距离阶梯流程是:

1) 使用几何方法(如三角视差法)测量距地球较近造父变星(Cepheids)的距离,从而定标造父变星的绝对光度,构建第一级阶梯;

2) 由于造父变星的发光光度与光变周期成正比^[1],因此基于第一级阶梯定标的造父变星绝对光度,再通过测量较远造父变星的光变周期和视亮

度,可以计算出距离从而构建第二级距离阶梯;

3) 在更大的距离尺度上,Ia型超新星被用作标准烛光。Ia型超新星是白矮星在吸积物质后达到临界质量时发生的剧烈爆炸,其爆炸光度非常稳定。利用同星系中的Ia型超新星和构建第二级阶梯的造父变星可以对Ia型超新星的绝对光度进行定标,从而外推得到Ia型超新星总样本的光度距离。

通过Ia型距离阶梯法,索尔·珀尔马特(Saul Perlmutter)、布莱恩·施密特(Brian P. Schmidt)亚当·里斯(Adam G. Riess)测得哈勃常数在 $67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ 左右,并发现宇宙目前正处于加速膨胀的状态^[2]。凭借这一发现,他们共同获得了2011年诺贝尔物理学奖。随着仪器的进步和发展,这一方法也在不断改进和完善。目前,使用Ia型超新星距离阶梯法的最新测量结果(Pantheon+ 和 SH0ES)测得,哈勃常数为 $73 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$,其数值误差在2%以内^[3-5]。

此外,距离阶梯的构建也存在其他方法,如图4所示。除利用造父变星作为定标的第二级阶梯以外,另一种关注度较高的使用红巨星尖端(Tip Red Giant Branch, TRGB)进行定标,目前使用该方法对哈勃常数的限制为 $69.8 \pm 2 \text{ km/s/Mpc}^{[17]}$ 。

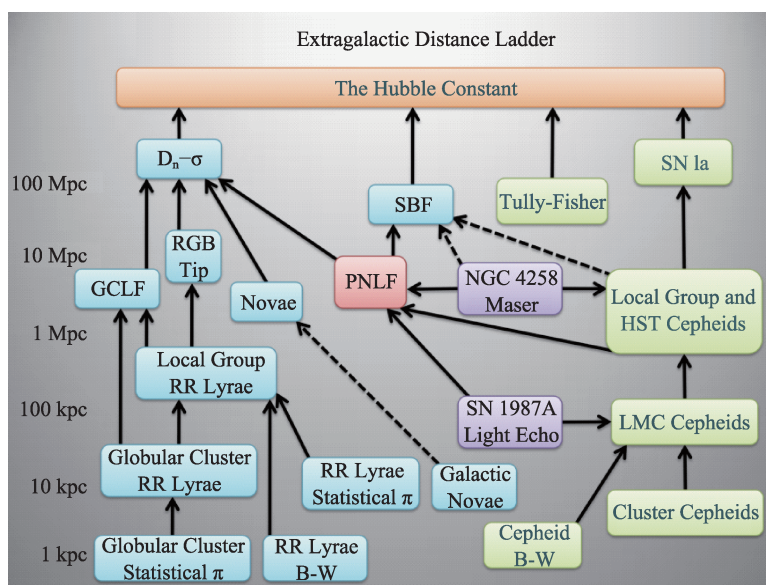


图4 多种距离阶梯测量哈勃常数的方法(图片取自维基百科(https://en.m.wikipedia.org/wiki/Cosmic_distance_ladder))

三、宇宙微波背景辐射测量哈勃参数

宇宙微波背景辐射(Cosmic Microwave Background, CMB)是热大爆炸宇宙学理论所预言的一种重要产物。在宇宙诞生后的极早期阶段,整个宇宙处于一种高温、高密度的等离子体状态,其中充满了自由的质子、电子和光子。在这一时期,光子不断地与等离子体中的带电粒子发生散射,使得光子与宇宙物质之间始终保持热平衡状态,宇宙因此呈现出一种“不透明”的特性。然而,随着宇宙的不断膨胀,宇宙的温度逐渐降低。当温度降至约 3000 K 时(此时宇宙学红移约为 1100),质子和电子获得了足够的条件进行复合,形成了中性原子(主要是氢原子)。这一过程被称为“再复合^①”,标志着光子与重子物质的脱耦。随着中性原子的形成,光子不再与物质发生频繁的相互作用,自由逃逸,宇宙便从“不透明”状态转变为“透明”状态。在光子自由传播的过程中,宇宙继续膨胀,导致光子的波长逐渐被拉长,能量也随之降低。经过约 138 亿年的传播,这些光子的温度降至 2.7255 K 左右,形成了如今观测到的宇宙微波背景辐射。

CMB 观测限制哈勃常数并非通过直接的距离测量,其核心在于测量各个角尺度下辐射涨落的相关性。由于再复合时期物质的密度分布不完全均匀,存在微小的涨落偏差。这种偏差使得光子在与重子物质解耦时的光子能量不同,就导致了如图 5

左图展示的 CMB 温度天图存在一定的涨落: $\Delta T(\vec{n}) = T(\vec{n}) - \bar{T}$,其中 $T(\vec{n})$ 为方向 $\vec{n}$ 的温度, $\bar{T}$ 为 CMB 的平均温度。值得注意的是,这一涨落并不是完全的随机涨落。再复合时期前,光子与重子的相互作用使得物质密度分布存在一定的尺度相关性(在下一节重子声学振荡测距中我们会详细说明)。一个直观的表现如图 5 右图所示。它是这样得到的:由左侧的温度天图中挑选出所有红色的极大值点(热点,或者蓝色极小值为冷点),以它们为中心提取 $5^\circ \times 5^\circ$ 的正方形并叠加取平均。从图中可以看出,方形中心具有一个半径约 0.5 度的圆和半径约 1 度的圆环,这其实就表现了物质分布涨落在空间尺度上的相关性。

在实际研究中,这一涨落可以利用角功率谱 C_l 来描述,角功率谱实际上来自空间温度涨落的球谐展开:

$$\frac{\Delta T(\vec{n})}{\bar{T}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vec{n}), \quad (3)$$

其中, Y_{lm} 是球谐函数, a_{lm} 是 CMB 温度场的球谐系数。而 C_l 则是球谐系数的统计平均,定义为:

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2. \quad (4)$$

CMB 的角功率谱中包含宇宙早期的信息,通过精确测量 CMB 的角功率谱,假定宇宙学模型,即可推断出该模型中相关参数(例如,哈勃常数)的值。图 6 是 Planck 卫星 2018 年的观测计算得到的角功

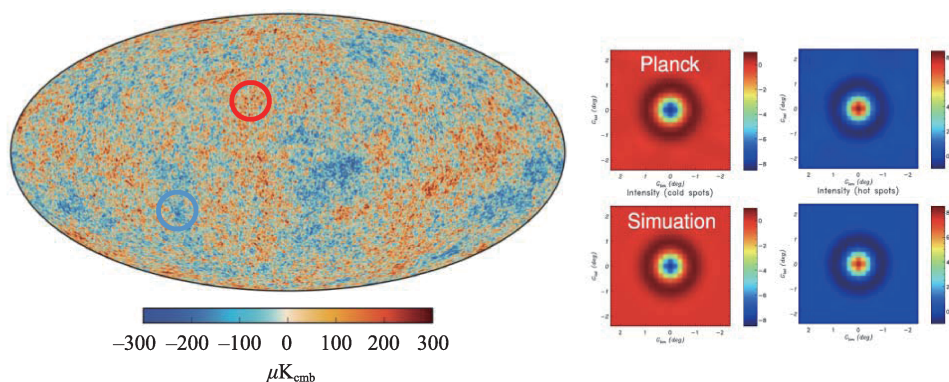
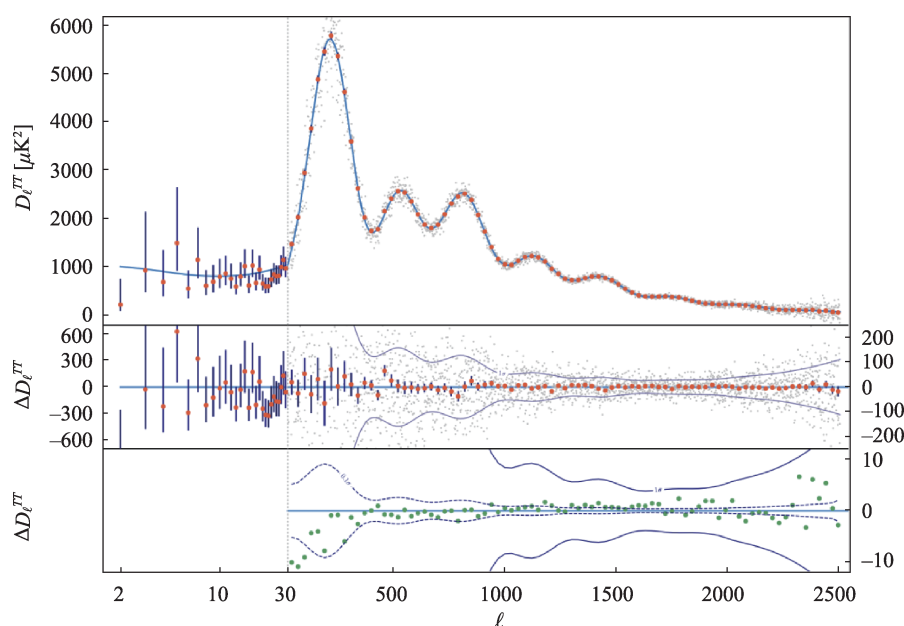


图5 Planck 卫星的 CMB 天图以及热点/冷点。左图是 Planck 观测的卫星天图,其中红圈和蓝圈是天图中热点和冷点的举例 (图片来源: https://cosmology.unige.ch/sites/default/files/media/Anthony_Challinor_CMB_lectures_jun13.pdf)

图6 CMB温度天图的角功率谱^[7]

率谱^[7]。其中包含误差棒的红点为测量数据,蓝线是对于目前的标准模型——包含宇宙学常数(暗能量, Λ)、冷暗物质的平直宇宙模型(Λ CDM)——的拟合,中间图为测量结果与模型拟合的残差。通过这一参数拟合,Planck 2018测得哈勃常数值为 67.4 ± 0.5 km/s/Mpc^[6]。

四、重子声学振荡测距

重子声学振荡是宇宙早期声波振荡在大尺度结构中留下的遗迹,其原理基于宇宙早期光子和重子相互作用形成的声波传播。这些声波在宇宙冷却和光子与重子解耦时冻结,形成了一个特征尺度 r_d (约 150 Mpc) 的密度峰,这也是前文所说物质密度相关性的来源之一。物质密度的扰动,为宇宙演化过程中的星系形成提供了“种子”,在物质密度高处,有更大概率产生星系。因此,对于某一个星系而言,距离其 r_d 处产生另一个星系的概率较高。针对全天的星系进行光谱巡天,测量其位置并将星系两两配对,计算两点相关函数,会发现在特征尺度 r_d 上星系对的个数会出现一个峰值,这便是重子声学振荡测距的基本物理图像。

重子声学振荡峰作为宇宙学测量的“标准尺”,测量的是红移 z 处的共动距离 $D_M(z)$ 和哈勃参数^② $H(z)$ 。在实际的光谱巡天中获得的星系信息为天球方位角和红移。在某一红移 z 处,通过天球方位角的信息,可以测量垂直于视线方向两点相关函数峰的角大小 $\Delta\theta(z)$,由于重子声学振荡的特征尺度 r_d 是共动距离,由此可以测得共动距离 $D_M(z) = \frac{r_d}{\Delta\theta(z)}$;

在平行于视线方向上,测量得到 $\Delta z(z)$ 这个尺度上两点相关函数具有峰值,它与该红移 z 处的哈勃参数 $H(z)$ 有关,一般的,可以定义一个等效距离 $D_H(z) = \frac{c}{H(z)} = \frac{r_d}{\Delta z}$ 来表示。综上所述,星系巡天测量重子声学振荡给出的是测量量是 $D_M(z)/r_d$ 和 $D_H(z)/r_d$ 。通过其他观测方式(例如CMB)结合模型假设测得特征尺度 r_d ,再结合重子声学振荡测距的数据,便可以对哈勃常数进行限制。

最早进行星系巡天测量重子声学振荡的是2000年开始的斯隆数字巡天项目(SDSS)^[8],截至目前观测20余年,该项目普查了200多万个河外天体的角位置和红移,用于测量声学视界的信号。2024年,第四代星系巡天项目暗能量光谱仪器(Dark En-

ergy Spectroscopic Instrument, DESI)发布了第一年观测的观测结果。图7和图8分别展示了DESI第一年观测的星系分布以及测量的重子声学振荡峰。仅仅通过第一年的观测,DESI对于哈勃常数的限制就达到了和SDSS 20年测量数据几乎接近的精度。在标准宇宙学模型下,结合CMB和大爆炸核合成的观测数据,DESI重子声学振荡给出的哈勃常数值为 $68.52 \pm 0.62 \text{ km/s/Mpc}^{[9]}$ 。

五、强引力透镜时间延迟测距

引力透镜现象是爱因斯坦广义相对论的直接预言之一,指的是光线在经过大质量天体(如星系、黑洞或星系团)附近时,由于引力的作用而发生弯曲的现象。这种现象类似于光学透镜对光线的折射,因此被称为引力透镜效应。

一个基本的引力透镜系统如图9所示。其中,

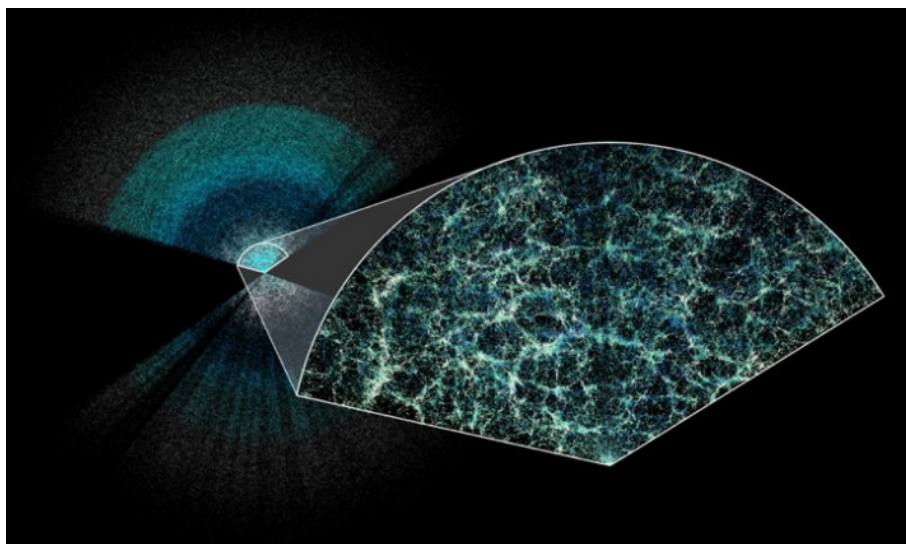


图7 DESI第一年观测得到的星系分布。放大区域是宇宙学红移0.2以内的亮星系样本,只包含DESI预计总观测数据的0.1%(图片来源: <https://www.desi.lbl.gov/category/blog/>)

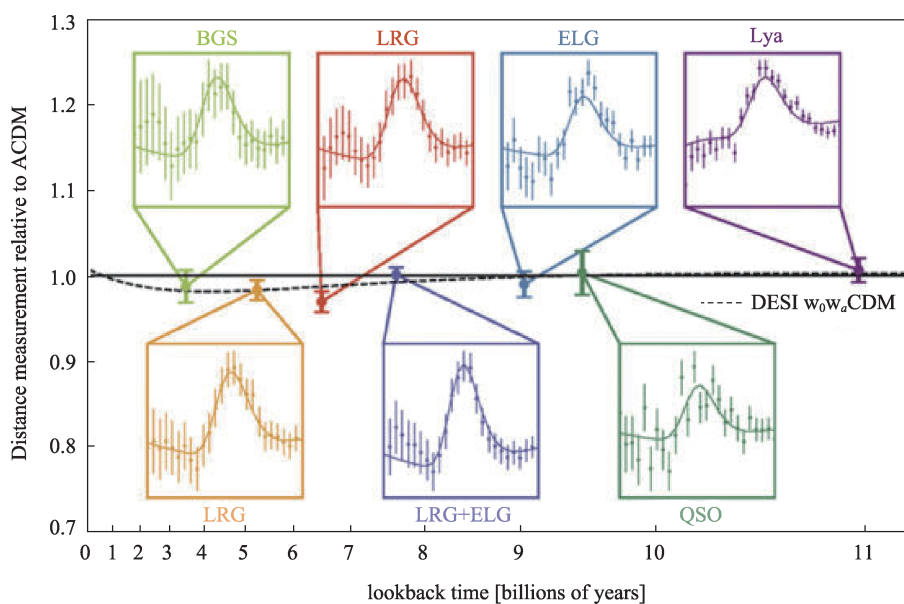


图8 DESI测量七个红移区间的重子声学振荡峰^[18]

扭曲时空的天体一般被称为“透镜天体”，而“背景天体”则是发出光线被“透镜天体”所影响发生偏折的源。背景天体发出的光经过前景星系或星系团时，传播路径会受到透镜天体引力场的作用而发生偏折，这种偏折导致远处的光源(如背景星系或类星体)的光线在经过透镜天体时被聚焦或扭曲，从而在观测者眼中形成放大的、扭曲的或多重的像。特别的，对于可以近似为点源的背景天体(类星体、超新星等)，可以观测到多个光度变化趋势一致，光谱完全一致，甚至光谱的演化趋势也极为相似的像。并且，由于不同像传播的路径几何长度不同，传播路径中受到的引力势大小也不同，这导致不同像同时刻发出的光传播到观者的时间具有延迟，即引力透镜时间延迟效应。

强引力透镜时间延迟测距本质上测量的是一组角直径距离的组合 $D_{\Delta t} = \frac{(1+z_l)D_{ol}D_{os}}{D_{ls}}$ ，一般称之为时间延迟距离，其中 z_l 为透镜天体的红移 D_{ol} 、 D_{os} 和 D_{ls} 的定义如图 9 所示，为角直径距离。时间延迟距离 $D_{\Delta t}$ 正比于两个像之间的时间延迟测量，因此，通过测量多像之间时间延迟、背景天体和透镜天体的红移以及强引力透镜图像，就可以得到角直径距离的测量进而限制哈勃常数。

强引力透镜时间延迟限制哈勃常数的想法在 1964 年由苏尔·雷夫斯达尔(Sjur Refsdal)提出^[10]，但受到时间延迟测量精度和透镜质量建模难度的限制，这一想法在 2010 年后才得以实现。由于单个强

引力透镜时间延迟系统限制哈勃常数的精度有限，目前的主流做法是挑选几个观测数据齐全、数据质量好且建模容易的系统进行联合限制。图 10 展示的是 H0LiCOW 团队利用强引力透镜类星体系统进行哈勃常数限制的结果^[11]。左图是该团队使用的 6 个强引力透镜系统，右图是由这六个系统单独进行限制得到的后验分布(彩色)以及进行联合限制得到的哈勃常数限制(黑色实线)，其给出的哈勃常数值为 $73.3^{+1.7}_{-1.8}$ km/s/Mpc。

除了使用强引力透镜类星体，最近几年关注度较高的强引力透镜时间延迟系统是强透镜超新星系统。这个系统相比于类星体系统具有多个优势：1) 超新星的持续时间较短，人们可以在超新星爆发过后对此系统的宿主星系做更进一步观测，避免如类星体系统中类星体本身亮度影响透镜系统其他成分的观测；2) 如果超新星是 Ia 型超新星，则可以将 Ia 型超新星标准烛光法和强透镜时间延迟结合起来，打破系统中的简并现象。

六、引力波测距

1986 年伯尼·舒茨(Bernard Schutz)提出：测量两个致密天体(如中子星或黑洞)旋进、合并过程中的引力波，可以推断出源的双星系统质量信息和光度距离^[12]。这种测量方法的核心在于测量引力波信号的频率演化和振幅变化。频率演化提供了关于双星系统质量的信息，而振幅则直接与源的距离

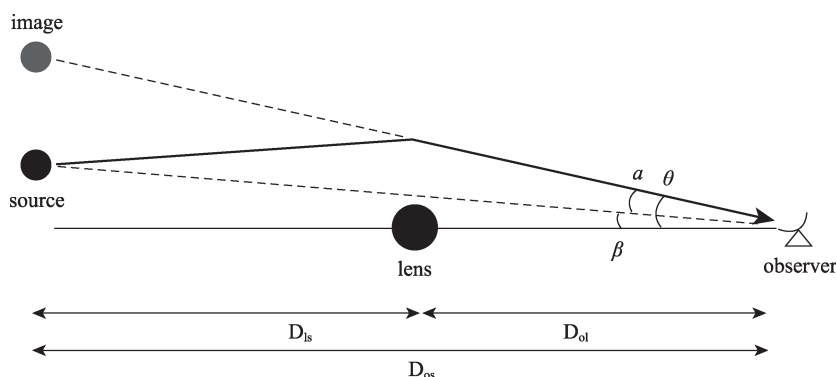


图 9 引力透镜系统示意图^[21]

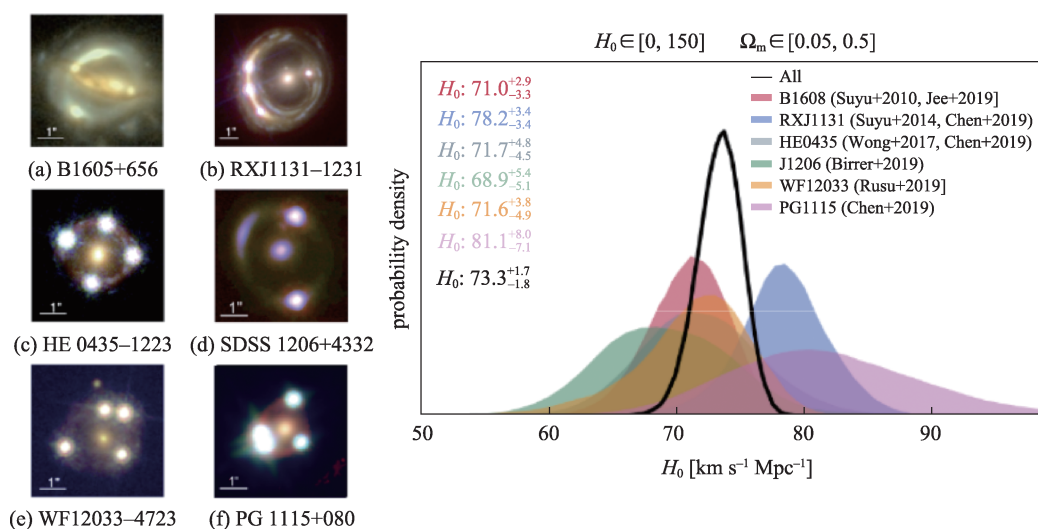


图10 H0LiCOW团队利用强引力透镜类星体时间延迟限制哈勃常数^[11]

相关。基于这一原理,引力波可以作为一种“标准距离指示器”,类似于宇宙学中的“标准烛光”,这种方法被称为“标准汽笛”。与标准烛光不同的是,引力波测距提供了一种完全独立且直接的距离测量方法,避免了传统距离阶梯方法中的系统误差,使得测量结果更加“干净”。

当引力波测距与源的红移测量相结合时,可以通过距离—红移关系直接推断哈勃常数以及其他宇宙学参数。然而,引力波信号本身存在红移简并性问题,即一个距离较远、质量较小的双星系统可能与一个距离较近、质量较大的双星系统产生相似的引力波波形。因此,仅通过引力波信号无法直接确定源的红移。解决这一问题的常用方法是寻找引力波源的电磁对应体,通过光谱分析测量源的红移,这种方法被称为“亮汽笛”。另一种方法是在引力波定位的天区内寻找所有可能的宿主星系,将每个星系的红移作为源的红移来测量哈勃常数,这种方法被称为“暗汽笛”。

目前,标准汽笛方法给出的哈勃常数测量值仍存在一定的误差。例如,首个双中子星合并事件GW170817(图11)给出的哈勃常数估计误差约为15%。然而,随着引力波探测器灵敏度的提升和更多数据的积累,标准汽笛法的重要性将日益凸显。初步估计,双中子星“亮汽笛”法的误差约为 $15\%/\sqrt{N}$,

其中 N 为探测到的双中子星数目。在第三代引力波探测器时代,仅一年的观测数据就有可能将哈勃常数的误差限制在2%以内^[19]。这表明,引力波测距在未来宇宙学研究中将发挥关键作用。

七、展望

图12展示了过去一段时间不同方法限制得到的哈勃常数值。可以看到,目前不同方法给出的哈勃常数范围在65 km/s/Mpc到75 km/s/Mpc之间。但值得注意的是,不同方法对哈勃常数的限制已经出现了明显的偏差。特别的,基于早期宇宙CMB所测量得到的哈勃常数值,与通过近距离Ia型超新星作为标准烛光所得到的测量值具有超过了5个标准差的偏差。这一偏差被称为“哈勃危机”(Hubble Tension)。

这一危机究竟来源于新物理,还是产生于观测数据中未知的系统误差,目前尚未定论。在理论方面,科学界提出了一些可能的解决方案,例如,早期暗能量理论,暗能量演化模型以及修改引力理论等;观测方面,一方面这需要对现有的测距方法系统误差进行更细致的剖析,另一方面也需要提高目前误差较大的测距方式的测量精度,并发展新的测距方式,以给出更多对于哈勃常数的独立检验。

未来,更多先进的天文探测设备将提供更高质量

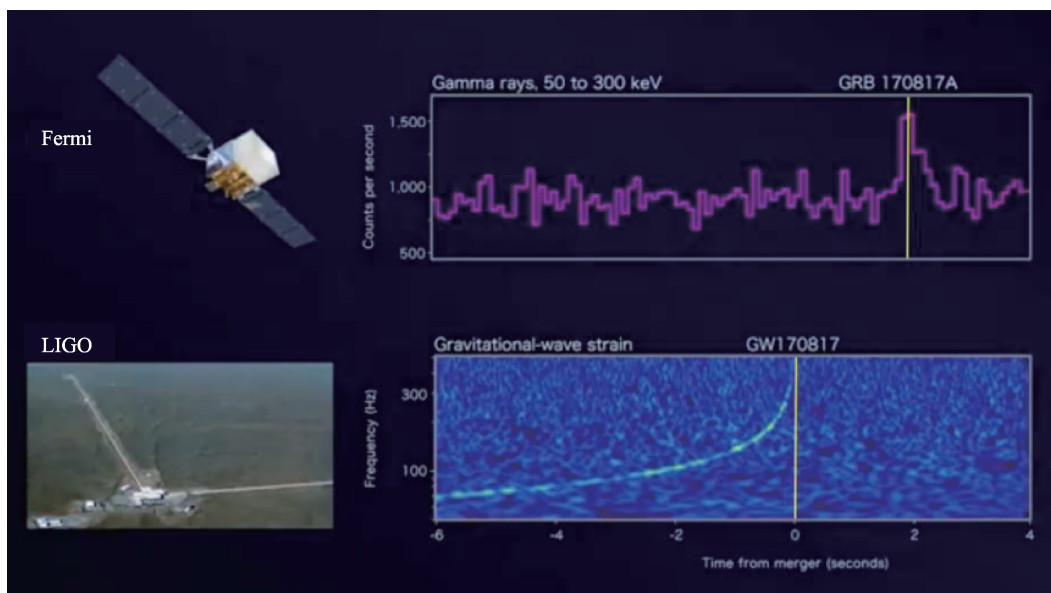


图 11 LIGO 探测 GW170817 引力波信号和 Fermi 探测与之成协的短伽马射线暴信号 GRB 170817A(图片取自网络)

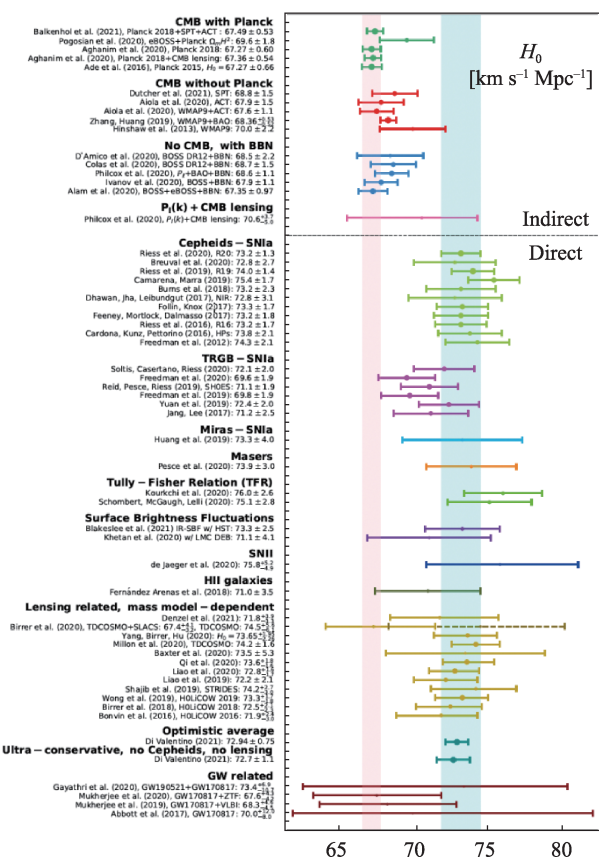


图 12 截至 2022 年各种宇宙学方法对哈勃常数的测量^[20]

量的观测数据。詹姆斯·韦布空间望远镜(James Webb Space Telescope, JWST)可以在距离阶梯测距

上给出更高精度的定标能力,探测更高红移处的 Ia 型超新星,拍摄更清晰度的强引力透镜系统; DESI 光谱巡天计划将在未来逐步释放其三年观测和五年观测的数据成果;下一代星系图像巡天中国空间站望远镜、欧几里得望远镜(Euclid)可以拍摄到宇宙更深处的星系图像,寻找到更多强引力透镜系统;目前, LIGO/Virgo/Kagra 探测器已经认证 100 多例引力波事例,而在未来,第三代引力波探测器,例如爱因斯坦望远镜(Einstein Telescope, ET)和宇宙学探针(Cosmic Explorer, CE),预计每年可以探测到 10^5 个引力波事例,将大大拓展引力波测距数据的样本量。期待在不久的将来,通过以上高质量的观测数据,人类能认识到“哈勃危机”背后的本质,对于宇宙的认识能走上更高的台阶,解开更多关于宇宙起源和演化的谜团。

致谢

本文受国家自然科学基金委重点项目 12333001 支持。

参考文献

[1] Hubble E. A Relation between Distance and Radial Velocity among

- Extra-Galactic Nebulae[J/OL]. Proceedings of the National Academy of Science, 1929, 15(3): 168-173.
- [2] Riess A G, Filippenko A V, Challis P, et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant[J/OL]. AJ, 1998, 116(3): 1009-1038.
- [3] Perlmutter S, Aldering G, Goldhaber G, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae[J/OL]. ApJ, 1999, 517 (2): 565-586.
- [4] Brout D, Scolnic D, Popovic B, et al. The pantheon+ analysis: Cosmological constraints[J/OL]. The Astrophysical Journal, 2022, 938 (2): 110.
- [5] Riess A G, Yuan W, Macri L M, et al. A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with 1 km s⁻¹ mpc⁻¹ uncertainty from the hubble space telescope and the shoes team [J/OL]. The Astrophysical Journal Letters, 2022, 934(1): L7.
- [6] Aghanim N, Akrami Y, Arroja F, et al. Planck2018 results: I. overview and the cosmological legacy ofplanck[J/OL]. Astronomy & Astrophysics, 2020, 641: A1.
- [7] Aghanim N, Akrami Y, Ashdown M, et al. Planck 2018 results: V. cmb power spectra and likelihoods[J/OL]. Astronomy & Astrophysics, 2020, 641: A5.
- [8] Alam S, et al. Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the Apache Point Observatory[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 103(8): 083533.
- [9] DESI Collaboration, DESI 2024 VI: Cosmological Constraints from the Measurements of Baryon Acoustic Oscillations, arXiv e-prints, arXiv:2404.03000(2024).
- [10] Refsdal S. On the possibility of determining Hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect[J/OL]. MNRAS, 1964, 128: 307.
- [11] Wong K C, et al. H0LiCOW - XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early- and late-Universe probes[J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2020, 498 (1): 1420-1439.
- [12] Schutz B F. Determining the Hubble constant from gravitational wave observations[J/OL]. Nature, 1986, 323(6086): 310-311.
- [13] Holz D E, Hughes S A. Using gravitational-wave standard sirens [J/OL]. Astrophys. J., 2005, 629: 15-22.
- [14] Messenger C, Read J. Measuring a cosmological distance-redshift relationship using only gravitational wave observations of binary neutron star coalescences[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2012, 108: 091101.
- [15] Scott D, Fabian S, Modern Cosmology (Second Edition)[M].
- [16] 赵峥. 大爆炸和宇宙学红移中常被误解的几个观念[J]. 大学物理, 2011, 30(02): 9-12, 15.
- [17] W.L. Freedman, Measurements of the Hubble Constant: Tensions in Perspective, ApJ 919 (2021) 16 [2106.15656].
- [18] DESI Collaboration, DESI 2024 III: Baryon Acoustic Oscillations from Galaxies and Quasars, arXiv e-prints, arXiv: 2404.03002 (2024).
- [19] Chen H Y, Fishbach M, Holz D E. A two per cent Hubble constant measurement from standard sirens within five years[J/OL]. Nature, 2018, 562(7728): 545-547.
- [20] Di Valentino E, Mena O, Pan S, et al. In the realm of the Hubble tension—a review of solutions[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2021, 38(15): 153001.
- [21] Masamune Oguri, Strong gravitational lensing of explosive transients [J/OL], Rep. Prog. Phys., 2019, 82:126901.

尾注：

- ① “再复合”，由英文 recombination 翻译得来。但事实上，并没有所谓的“再”复合，这次电子与质子的复合是首次复合。之所以用“再复合”一词，是因为该机制的发现时间晚于发现恒星电离氢的复合过程。发生时间上，“再复合”发生在“复合”之前。
- ② 注意此处是红移 z 处的哈勃参数，而非哈勃常数，哈勃常数是红移为 0 当前宇宙的哈勃参数。

