



中子星

——第53届IPHO理论第2题解析

杨远庆¹ 宋 峰²

(1. 广州外国语学校; 2. 南开大学物理科学学院)

2023年第53届国际物理奥林匹克竞赛理论题第二题是关于中子星的,该题涉及核物理、相对论等内容。本文根据官方提供的参考答案,给予解析。

A.1 题目中公式(1)给出的结合能公式为魏茨泽克-贝特(Weizsäcker-Bethe)质量公式,为一个半经验公式。其体积能和表面能是基于液滴模型(将原子核类比为带电液滴)而来,故该公式在忽略壳层效应的情况下表现较为良好。但实际观测中,幻数核(质子数 Z 或中子数 N 接近幻数(2, 8, 20, 28, 50, 82, 126)的原子核)偏离液滴模型,需要引入壳修正项才行。该公式的物理意义是将结合能表述为四部分,第一项是体积能:核子间的强相互作用为主导,正比于 A ;第二项是表面能:表面核子结合较弱,故存在修正项,修正项随 A 增大而减小;第三项是库仑能:质子间的电磁斥力所致,随 A 增大而显著增强;第四项的对称能是当原子核中的中子数和质子数不相等时,会产生额外的能量贡献,称为对称能。

本问中要求使比结合能最小的质量数 A ,即使

$$\frac{B(Z, N)}{A} = \frac{a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}}{A} \quad (1)$$

取到极小值,将 $N=Z$,即 $A=2Z$ 代入后等号右边分子第四项为0,则上式可简化为

$$\frac{B}{A} = a_v - a_s A^{-\frac{1}{3}} - a_c \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (2)$$

即

$$\frac{B}{A} = a_v - a_s A^{-\frac{1}{3}} - \frac{a_c}{4} A^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

上式两边对 A 求导并令其为0有

$$\frac{d\left(\frac{B}{A}\right)}{dA} = \frac{1}{3} a_s A^{-\frac{4}{3}} - \frac{a_c}{6} A^{-\frac{1}{3}} = 0 \quad (4)$$

两边同乘以 $A^{\frac{4}{3}}$ 有

$$\frac{1}{3} a_s - \frac{a_c}{6} A^{\frac{1}{3}} = 0 \quad (5)$$

解得

$$A = \frac{2a_s}{a_c} \quad (6)$$

代入数值得

$$A = 50 (\text{必须取整数}) \quad (7)$$

注:实际上,比结合能 B/A 在质量数 $A=56$ (铁-56)至62(镍-62)范围内达到最大值,本题的答案与实际情况吻合地还算可以,差异的来源在于忽略了配对能及模型的局限性(更精细的核结构模型如壳模型)。

A.2 当质量数 A 为定值时,若要使比结合能 $B(Z, A-Z)/A$ 取极大值,先将 $N=A-Z$ 代入式(1)有

$$\frac{B(Z, N)}{A} = \frac{a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A} - a_{\text{sym}} \frac{(2Z-A)^2}{A}}{A} \quad (8)$$

对 Z 求导并令值为零有

$$-2a_c \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} - 4a_{\text{sym}} \frac{2Z-A}{A} = 0 \quad (9)$$

化为

$$Z \left(\frac{2a_c}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8a_{\text{sym}}}{A} \right) = 4a_{\text{sym}} \quad (10)$$

Z 的解便为最稳定的原子序数 Z^* ,于是

$$Z^* = \frac{1}{1 + \frac{a_c}{4a_{\text{sym}}} A^{2/3}} \cdot \frac{A}{2} \quad (11)$$

注:由结果可知,当 A 足够小时, $Z^* \approx N$;而当 A 较大时, Z^* 会变得远小于 N 。从公式可以看出,对称能倾向于令 $Z=N$ (求导后的第二项),但库仑相互作用则倾向于让 $Z \rightarrow 0$ (求导后的第一项), Z^* 的值则由这两种竞争效应的平衡情况决定。对含有过多中子(质子)的原子核(核素)会经历 β -衰变(β^+ 衰变或电子俘获),最终向稳定的 (Z, N) 演化。

将 $A=197$ 代入,有

$$Z^* = 79 \quad (12)$$

A.3 将结合能代入给定的不等式后,很容易发现由于质量数守恒,体积能、对称能相互抵消。因此,该能量条件仅涉及表面能 a_s 和库仑势能 a_c ,于是其关系为

$$a_s \left[A^{2/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{2/3} \right] + a_c \left[\frac{Z^2}{A^{1/3}} - 2 \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} \right] > 0 \quad (13)$$

再如题干所言,上式可简化为

$$a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[1 - \frac{1/2}{(1/2)^{1/3}} \right] > -a_s \left[A^{2/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{2/3} \right] \quad (14)$$

$$\text{于是有 } \frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \cdot \frac{a_s}{a_c} \quad (15)$$

$$\text{进而知 } C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx 7.0 \times 10^{-1} \quad (16)$$

注:若将 a_s 及 a_c 值代入后发现对于 $Z^2/A \geq 18$ 的核素,这种对称裂变(分裂成两个相同原子核)过程是会发生的。例如,铅(Pb)的原子序数 $Z=82$,质量数 $A=208$,在其多种同位素中其实是属于稳定的。但通过计算可得 $82^2/208 \approx 32$,高于前面所求临界值18。解决这一矛盾的关键在于形变导致的势垒效应——当一个重核分裂成两个轻核时,其形状和表面结构会从稳定构型(由于相互作用可能并非球形)发生改变,从而导致表面能随之升高。现实情况是,虽然某些重元素在能量条件上表明其具有裂变的可能,但要克服这个势垒效应所需的时间却可能是极其漫长的,故会表现出稳定的特性。

B.1 将之表述为题干所给结合能的形式,我们

先去除参数 A 的相关性($A^{5/3}$),则表达式可表述为:

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{G m_N^2}{R_0} \quad (17)$$

再利用题干所给的 G 与普朗克质量 M_p 的关系式 $G = \hbar c / M_p^2$ 可得

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c m_N^2}{R_0 M_p^2} \approx 6.4 \times 10^{-37} \text{ MeV} \approx 6 \times 10^{-37} \text{ MeV} \quad (18)$$

此处的 M_p 为通常所说的普朗克质量。上述结果表明引力效应在核物理的尺度下是极其微弱的,特别是 G 用MeV单位的普朗克质量 M_p 表示时更为明显。

我们将结合能公式—题干给出的(1)式

$$B(Z, N) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

加上引力势能修正项便可写为

$$B_{\text{total}}(A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A} + a_{\text{grav}} A^{5/3} \quad (19)$$

根据题干,忽略表面能 $a_s A^{2/3}$ 的影响,对纯中子核而言 $N=A, Z=0$,再利用核素稳定性的条件是结合能必须为正有

$$B_{\text{total}}(A) = a_v A - a_{\text{sym}} A + a_{\text{grav}} A^{5/3} > 0 \text{ 或 } a_v - a_{\text{sym}} + a_{\text{grav}} A^{2/3} > 0 \quad (20)$$

$$\text{即 } A > \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_v}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2} \quad (21)$$

再结合题干所述,上式可等价表述为

$$A > A_c \quad (22)$$

从而有

$$A_c = \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_v}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2} \approx 4.4 \times 10^{55} \approx 4 \times 10^{55} \quad (23)$$

注:中子滴过程可视为表面积变化最小的过程,对应于最低势垒。这会导出一个条件: $B_{\text{total}}(A) > B_{\text{total}}(A-1)$ (或近似有 $dB_{\text{total}}/dA > 0$)在 $B_{\text{total}} < 0$ 的区间内成立。于是当 $dB_{\text{total}}/dA = 0$ 时,求得的临界值 A_c 更小,但这种不稳定初态在自然界中能否形成依然存疑。

中子星诞生于II型(核坍缩)超新星爆发,其初始态常被称为原中子星——这是一种处于高温下的高能态。中微子在 $\mathcal{O}(10)$ 秒量级(约10秒)将热量从原中子星带出。至于中子星的最小可能质量是多少,这一问题目前尚未得到解决,部分原因在于计算机模拟超新星爆发时依然存在着巨大的挑战。尽管理论上中子星质量可远小于太阳质量($M_{\odot}$),但模拟与观测数据均表明其质量 $\geq 1.4M_{\odot}$ 。

C.1 根据能量守恒定律,自由落体系统的速度满足 $v^2 = 2g\Delta h = 2\Delta\varphi$ (24)

对于延迟时间的推导,我们假设钟-II在惯性参考系 F 中于时刻 t 和 $t+\Delta T_{II}$ 分别经过无限接近的两点 z 及 $z+\Delta z$,则由洛伦兹变换

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

有

$$t = \gamma \left(t_F - \frac{vz}{c^2} \right), \quad t + \Delta T_{II} = \gamma \left[t_F + \Delta T_F - \frac{v(z + \Delta z)}{c^2} \right] \quad (25)$$

故钟-II记录的时间间隔为

$$\Delta T_{II} = \gamma \left(\Delta T_F - \frac{v}{c^2} \Delta z \right) \quad (26)$$

$$\text{其中 } \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

而 $\Delta z/\Delta T_F = v$, $\Delta T_F = \Delta T_I$, 于是

$$\Delta T_{II} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta z}{\Delta T_F} \right) \Delta T_F = \gamma (1 - \beta^2) \Delta T_F = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta T_I \quad (27)$$

将 $v^2 = 2g\Delta h = 2\Delta\varphi$ 代入有

$$\Delta T_{II} = \sqrt{1 - \frac{2\Delta\varphi}{c^2}} \Delta T_I \approx \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right) \Delta T_I \quad (28)$$

C.2 根据题干所给,光从脉冲星 N 传播到地球 E 所需时间为 $t_{N-E} = \int_{x_N}^{x_E} \frac{dx}{c_{\text{eff}}(x)}$ (29)

将上式分母根据题干所给写成引力势的一阶形式,则

$$t_{N-E} \approx \frac{1}{c} \int_{x_N}^{x_E} \left(1 + \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^2 \sqrt{x^2 + d^2}} \right) dx = \frac{x_E - x_N}{c} + \Delta t \quad (30)$$

上述等式的中间项利用了引力势的表述

$$\varphi = -\frac{GM_{\text{WD}}}{r} \quad (31)$$

其中 r 为所求引力势位置到天体中心的距离。

注:时钟- F 处于惯性参考系中,而时钟-II则不是。我们使用另一个自由下落参考系II'中的时钟-II'作为时钟-II的瞬时惯性参考系,而从时钟- F 观测时钟-II'时可利用洛伦兹变换。

于是有

$$\frac{x_E - x_N}{c} + \int_{x_N}^{x_E} \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3 \sqrt{x^2 + d^2}} dx = \frac{x_E - x_N}{c} + \Delta t \quad (32)$$

从而知

$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_{x_N}^{x_E} \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3 \sqrt{x^2 + d^2}} dx = \\ &= \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) \Bigg|_{x_N}^{x_E} = \\ &= \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{\sqrt{x_E^2 + d^2} + x_E}{\sqrt{x_E^2 + d^2} - x_E} \cdot \frac{\sqrt{x_N^2 + d^2} - x_N}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + x_N} \right) \quad (33) \end{aligned}$$

此即为弯曲时空下光线的时延效应(夏皮罗(Shapiro)时间延迟效应的近似)。

再利用泰勒展开得一阶近似

$$\begin{aligned} \sqrt{x_E^2 + d^2} - x_E &\approx \frac{d^2}{2x_E}, \quad \sqrt{x_E^2 + d^2} + x_E \approx 2x_E \\ \sqrt{x_N^2 + d^2} - x_N &\approx -2x_N, \quad \sqrt{x_N^2 + d^2} + x_N \approx -\frac{d^2}{2x_N} \quad (34) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \Delta t &\approx \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{d^2} \cdot \frac{-2x_N}{-d^2} \right) = \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{16x_E^2 x_N^2}{d^4} \right) \\ &= 2 \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4|x_N| |x_E|}{d^2} \right) \quad (35) \end{aligned}$$

C.3 由几何关系有 $|x_N| = L \cos \varepsilon$, $d = L \sin \varepsilon$, 当 $\varepsilon \ll 1$ 时利用泰勒展开知 $\cos \varepsilon \approx 1$, $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$, 于是, $|x_N| = L \cos \varepsilon \approx L$, $d = L \sin \varepsilon \approx L\varepsilon$, 对于 Δt_{max} , 其正好对应于C.2所求结果的模型, 于是有

$$\Delta t_{\max} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E}{L\varepsilon^2} \right) \quad (36)$$

而对于 $\Delta t_{\min}, x_N$ 符号已经从负变为正, 当然, 所求结果依旧利用 C.2 近似之前所求的表达式(33)

$$\Delta t = \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{\sqrt{x_E^2 + d^2} + x_E}{\sqrt{x_E^2 + d^2} - x_E} \cdot \frac{\sqrt{x_N^2 + d^2} - x_N}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + x_N} \right) \quad (33)$$

并考虑到泰勒展开的一阶近似改写为

$$\begin{aligned} \sqrt{x_E^2 + d^2} - x_E &\approx \frac{d^2}{2x_E}, \sqrt{x_E^2 + d^2} + x_E \approx 2x_E \\ \sqrt{x_N^2 + d^2} - x_N &\approx \frac{d^2}{2x_N}, \sqrt{x_N^2 + d^2} + x_N \approx 2x_N \end{aligned} \quad (37)$$

于是

$$\begin{aligned} \Delta t_{\min} &\approx \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E \cdot \frac{d^2}{2x_N}}{\frac{d^2}{2x_E} \cdot 2x_N} \right) = \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E^2}{x_N^2} \right) = \\ &2 \frac{GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E}{x_N} \right) \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E}{L} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

从而有

$$\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} = \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right) \quad (39)$$

上式中已利用 $x_N \approx L$, 可以看出结果与 L 及 x_E 无关。

$$\text{C.4 利用泰勒展开 } \cos \varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (40)$$

于是我们可以估算出

$$\varepsilon^2 \approx 2 \times (1 - \cos \varepsilon) = 0.00022 \quad (41)$$

而从图中我们大致可以得到延迟时间的差值约为

$$\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} \approx 50 \mu\text{s} \quad (42)$$

从而利用 C.3 所求结果式(39)可以得到

$$M_{\text{WD}} = M_{\odot} \left(\frac{2GM_{\odot}}{c^3} \right)^{-1} \frac{\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}}{\ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right)} \approx 0.5 M_{\odot} \quad (43)$$

注: 本问中的数据大致对应于脉冲星 PSRJ1614-2230 [参见 P·B·Demorest 等人发表于《自然》467 卷, 1080-1083(2010) 页的论文]。通过对夏皮罗延迟效应的测量, 其伴生白矮星质量被确定为 $0.500 \pm 0.006 M_{\odot}$, 再结合双星系统的开普勒轨道参

数, 中子星质量被确定为 $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$, 此为当时已知最重的中子星纪录。此后, 学界陆续发现了多个更重的中子星候选体, 2023 年的候选体 PSR J0952-0607 质量约为 $2.35 M_{\odot}$ 。

C.5 当中子星质量 M 足够大时, 对于半径为 R 的圆形轨道, 其运动方程可以写为

$$m\omega^2 R = G \frac{Mm}{R^2} \quad (44)$$

很容易得到

$$\omega^2 R^3 = GM = \text{const} \quad (45)$$

此即为开普勒第三定律, 而且该关系适用于比圆周运动更一般的轨道—椭圆轨道。于是结合题干 $\omega = \chi R^p$ 我们便有

$$p = -\frac{3}{2} \quad (46)$$

当然, 就算不要求中子星的质量足够大, 我们依然可以求得上述结果。对于圆周运动的双星系统有

$$m_1 \omega^2 r_1 = G \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad m_2 \omega^2 r_2 = G \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad r_1 + r_2 = R \quad (44')$$

$$\text{解得 } \omega^2 R = G \frac{m_1 + m_2}{R^2}$$

$$\text{即 } \omega^2 R^3 = G(m_1 + m_2) = \text{const} \quad (45')$$

于是结合题干 $\omega = \chi R^p$ 我们便有

$$p = -\frac{3}{2} \quad (46')$$

C.6 系统总能量表述为

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 - G \frac{Mm}{R} \quad (47)$$

再结合圆轨道的运动方程式(44)有

$$E = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{R} \quad (48)$$

因此, 当引力波辐射导致能量 E 减小时, 轨道半径 R 应减小, 角频率 ω 应增大, 而根据题干振幅与 $R^2 \omega^2$ 成正比, 结合式(45)知振幅与轨道半径 R 成反比, 故振幅应增大。综上分析有, 频率和振幅都应随着时间的推移而增大, 于是引力波信号波形图最可能的情况是如(b)所示。