



# 粒子与波

## ——第51届国际物理奥赛理论第二题

杨佳心 宋峰

(南开大学物理科学学院 300071)

波粒二象性是量子力学的核心概念之一。波粒二象性认为每个粒子都可以被描述为波,反之亦然。在本题中,我们将根据这个概念和其他一些基本假设来探索微观世界中两种不同类型的粒子——费米子和玻色子的量子现象。

### A 部分腔内的微观粒子(1.4分)

考虑一个质量为  $m$  的粒子在一维势阱中运动,其势能  $V(x)$  由下式给出:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ or } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

虽然经典粒子可以具有任何动能和势能,但是对于量子粒子来说,只允许具有某些特定的正的离散的能量。当微观粒子处在这样的允许状态下,可以通过具有节点的德布罗意驻波来描述。

A.1 确定势阱中微观粒子的最小可能能量  $E_{\min}$ 。用  $m, L$  和普朗克常数  $h$  来表示。(0.4分)

粒子具有多个可能的能量,其中能量最小的状

态称为基态,所有其余可能的状态称为激发态。基态的能量记为  $E_1$ ,按升序排列,所有可能的能量值,记为  $E_n$ 。这里  $n = 1, 2, 3, \dots$

A.2 求出能量  $E_n$  的一般表达式(0.6分)

A.3 只有通过发射或吸收一定能量差的光子,粒子才能从一种状态瞬时跃迁到另一种状态。求出粒子从第一激发态( $E_2$ )跃迁到基态( $E_1$ )时发射的光子的波长  $\lambda_{21}$ 。(0.4分)

提示:根据量子论中能量与动量的关系式、德布罗意关系式、跃迁时能级差与波长的关系式,可以得到结果。

### B 部分分子的光学性质(2.1分)

在这部分,我们将研究花青分子 Cy5 的几种光学性质,花青是一种广泛使用的染料分子,其分子结构如图 1(a)所示。它的光学性质主要由碳骨架(主链)决定,碳骨架由碳原子之间交替的单双键组成,如图 1(b)所示,而分子末端的环以及自由基 R 对

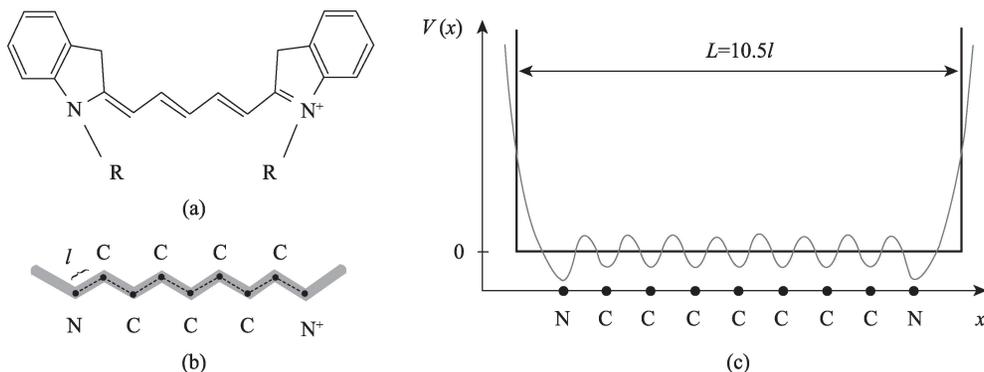


图1 (a)花青 Cy5 分子的化学结构(为简单起见,未显示氢原子, R 表示一些基团); (b) Cy5 分子的碳骨架(主链), 平均原子间距为  $l$ ; (c) 电子沿主链(细线)的势能及其通过方程 1 给出的阶跃函数的近似值(粗线)

其光学性质的影响要小得多。碳骨架中每个C原子(和N原子)的四个价电子中有三个形成化学键,而剩下的一个价电子被“共享”并可以沿整个骨架移动。每个这样的电子的净势能在图1(c)中用振荡的细线显示,细线上的最小值对应于C和N原子的位置。

为简单起见,我们将通过式(1)中给出的简单函数对该势能做近似,参见图1(c)中的粗线,其宽度  $L = 10.5 l$ , 这里  $l = 140 \mu\text{m}$  是平均原子间距,图1(b)中也标出了。在图1(b)的碳骨架中,有由10个电子组成的“电子气体”(7个来自于C原子,2个来自于N原子,1个来自于  $\text{N}^+$  离子),这些电子气体在A部分所述的一维势阱中运动。在我们的计算和推导中,我们可以忽略这些电子的相互作用;然而,我们应该考虑到电子是费米子的事实,因此遵守泡利不相容原理。我们还可以忽略其他电子以及原子核运动的影响。

B.1 假设电子系统最初处于基态,求出Cy5分子可以吸收的光子的最大波长 $\lambda$ 。用 $l$ 、物理常数和一些数值因数来表达你的答案,并计算出具体数值。(0.8分)

B.2 另一种染料分子Cy3具有类似的结构,但其骨架(主链)少了2个碳原子。与Cy5分子相比,它的吸收光谱向更蓝或更红的光谱区移动了吗?计算这个光谱位移 $\Delta\lambda$ 的大小。计算时可以假设去掉两个碳原子不会改变分子形状,只会使主链长度缩短两个原子间距离。(0.4分)

处于激发态的分子在发射光子的同时会自发跃迁到基态。平均自发辐射速率 $K$ (即处于激发态的分子  $dN/N$  随着时间  $dt$  相对减少值,  $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ ) 由发射光子的波长 $\lambda$ 、跃迁电偶极矩  $d$  ( $d$  的数量级为  $d \cong el$ , 这里  $e$  是基本电荷量)以及真空介电常数 $\epsilon_0$ 和普朗克常数 $h$ 决定。

B.3 使用量纲分析,根据 $\epsilon_0$ 、 $h$ 、 $\lambda$ 和 $d$ ,确定自发辐射速率的表达式。表达式的数字因数是  $\frac{16}{3}\pi^3$ 。(0.7分)

B.4 对于Cy5分子,  $d \approx 2.4 \text{ e}\cdot\text{l}$ 。计算Cy5分子最低激发态的平均荧光寿命 $\tau_{\text{cys}}$ ,该寿命是其跃迁到基态的速率的倒数。(0.2分)

提示:本部分前两问利用玻尔量子论可以计算得到,B3通过量纲分析,B4则根据前面的结果进行计算。

## C 部分玻色-爱因斯坦凝聚(1.5分)

这部分与A部分和B部分没有直接关系。在这里,我们将研究玻色子粒子的集体行为。玻色子不遵守泡利不相容原理,并且在低温或高密度下会经历一种被称为玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)的戏剧性现象。这是一个有趣的集体量子态的相变:大量相同的粒子“凝聚”成一个单一的量子态,并开始表现为一个单一的波。通常,通过将固定数量的粒子冷却到临界温度以下来实现这种相变。原则上,也可以通过保持温度固定并使得粒子密度超过其临界值来实现。

我们首先研究相变时温度和粒子密度之间的关系。事实证明,可以通过一个简单的观察来估计其临界值:当粒子的均方速度对应的德布罗意波长等于气体中粒子之间的特征距离时,就会发生玻色-爱因斯坦凝聚。

C.1 处于热平衡的 $^{87}\text{Rb}$ 原子,设原子间没有相互作用势能,求出典型线性动量 $p$ 和典型德布罗意波长 $\lambda_{\text{db}}$ ,用原子质量 $m$ 、温度 $T$ 和物理常数来表达。(0.4分)

C.2 计算气体中原子之间的典型距离 $l$ ,它是原子数密度 $n$ 的函数。进而推导出临界温度 $T_c$ 是原子质量、密度和物理常数的函数。

为了在实验室中实现BEC,实验人员必须将气体冷却到 $T_c = 100 \text{ nK}$ 的低温。

C.3 如果跃迁发生在这样的温度下,那么Rb气体的原子数密度 $n_c$ 是多少?为了便于比较,计算标准状态( $T_0 = 300 \text{ K}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ )下理想气体的“普通”粒子数密度 $n_0$ 。“普通”气体的密度 $n_0$ 是Rb气体的原子数密度 $n_c$ 的多少倍?假设Rb原子的质量等于87个原子质量单位( $m_{\text{amu}}$ )。

提示:根据能均分定理,可以得到理想气体的平均动能,再利用德布罗意关系式以及理想气体状态方程,可以得到本题目的答案。

### D 部分 三光束光学晶格(5分)

第一个玻色-爱因斯坦凝聚态产生于1995年,从那以后,实验工作向不同的方向发展。在这一部分中,你将研究一个特别有成果的想法,将凝聚态加载到一个空间周期势中,空间周期势是通过多个相干激光束的干涉而产生的。由于产生的干涉图案的周期性,它们被称为光学晶格。在光学晶格中运动的原子的势能  $V(\vec{r})$  与光的强度成正比,在计算中你可以假设

$$V(\vec{r}) = -\alpha \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \right\rangle \quad (2)$$

这里,  $\alpha$  是一个正的常数,尖括号表示时间平均值,以消除随时间的快速振荡项。第  $i$  个激光器产生的电场为

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

式中  $E_{0,i}$  为振幅、 $\vec{k}_i$  为波矢和  $\vec{e}_i$  为单位向量。

本题的任务是研究由三个相等强度的相干激光束干涉产生的三角形光学晶格。典型设置如图2(a)所示。在这里,所有三个光束的振动方向都为  $z$  方向,且在  $xy$  平面中传播,并以  $120^\circ$  的角度相交。选择  $x$  方向平行于波矢量  $\vec{k}_1$ 。

D.1 使用式(2)和式(3),推导得到势能  $V(\vec{r})$  的表

达式,它是光束所在平面中  $\vec{r}=(x,y)$  的函数。

提示:结果可以巧妙地表示为常数项加上三个参量  $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$  的余弦函数的和。请将你的结果写成这样的表达式,并确定向量  $\vec{b}_i$ 。(1.4分)

D.2 由此产生的势能具有六倍旋转对称轴,即电势分布相对于绕原点旋转  $60^\circ$  的倍数是不变的。给出一个简单的证据来证明事实确实如此。(0.5分)

上述对称性的观察简化了二维电势分布  $V(\vec{r})$  的分析。如图2(b)所示,正六边形具有对称线,这些对称线分别连接相对的顶点(实线)和相对边的中点(虚线)。因此,这种情况下,不需要制作和研究二维势图,因为通过关注沿着对称线运行的  $x$  和  $y$  坐标,可以得到很多结论。

D.3 求出沿着坐标轴的势能  $V(\vec{r})$  的值,即确定函数  $V_x(x) \equiv V(x,0)$  和  $V_y(y) \equiv V(0,y)$ 。  $V_x(x)$  和  $V_y(y)$ , 只是一个变量的函数,求出  $V_x(x)$  和  $V_y(y)$  最大或最小时的位置。由于  $V_x(x)$  和  $V_y(y)$  函数是周期性的,在每个结果表达式中只需要给出周期性重复的最小值和最大值中的一个。(1.2分)

我们感兴趣的是确定所谓格点的位置,即全二维势的最小值  $V(\vec{r})$ 。得到的单参数函数的极小值  $V_x$  和  $V_y$  确定了其可能的位置,但仍需进行检查以消除鞍点。如图2(c)所示,当沿着单条线进行研究时,鞍点可能伪装成最小值,但事实上却不是。

D.4 回顾上一个问题中的结果,以确定光学晶格的实际最小值:求出最接近(但不重合)原点的所

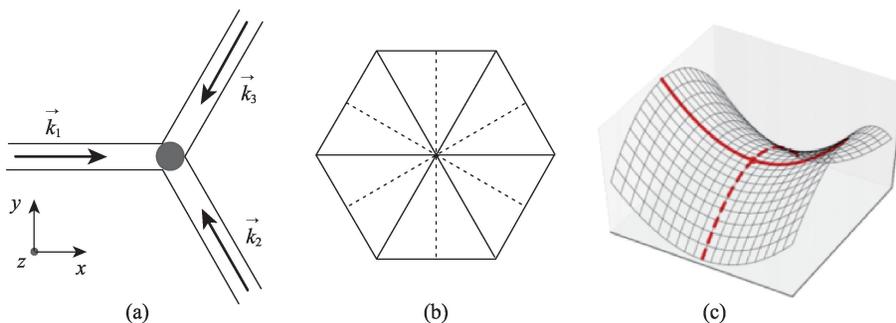


图2 (a)三光束光学晶格:具有波矢量的三个平面波  $\vec{k}_{1,2,3}$  在由灰色圆圈指示的区域中相交并干涉;(b)正六边形的对称性:实线和虚线显示两组对称轴;(c)鞍点:曲面上的一个点,在该点上,正交方向上的斜率均为零,但不是所绘制函数的局部极值。沿着实线标记的轨迹行进时,会遇到明显的极小值。需要对垂直方向(虚线)进行额外分析,以区分真正的最小值和鞍点(如图所示)

有等效最小值。最近的两个极小值之间距离(光学晶格的晶格常数) $a$ 是多少?用激光波长 $\lambda_{\text{las}}$ 来表达你的答案。(0.8分)

超冷原子的电中性表明,只有当两个或多个原子占据光学晶格的同一位置时,它们的相互作用才变得相关。然而,实验学家也能够测得维持远程原子相互作用的设置。一种可能的方法是创造所谓的里德伯原子,这些原子体积巨大,具有其他独特的性质。里德堡原子是受激原子,其中一个电子被提升到具有非常高的主量子数 $n$ 的状态,里德堡原子的大小可以通过用轨道角动量 $n$ 计算该电子的经典圆形轨道的半径来估算,这里 $\hbar$ 是约化普朗克常量。

D.5 计算 $n$ 的值,该值对应于与激光波长 $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ 相当的Rb里德伯原子的半径。用 $\lambda_{\text{las}}$ 和物理常数表示你的答案,并求出它的数值。(1.1分)

提示:D1根据题给公式(2)、(3)进行数学运算,即可得到。D2通过观察三个向量 $\vec{b}_i$ 的对称性可得到。根据D1结果,分别令 $x=0$ 和 $y=0$ ,可以得到结果。 $V_x(x)$ 和 $V_y(y)$ 是各自位置参数 $x$ 或 $y$ 的函数,“在每个结果表达式中只需要给出周期性重复的最小值和最大值中的一个”,意思是说无须给出周期性结果。只需要给出以一个最大或最小值作为代表。得到的结果是余弦函数的和,具有周期性。根据余弦函数的性质,可以得到最大值和最小值的位置。D4根据上一题的结果进行分析。D5利用圆周运动公式、静电力公式、角动量量子化可以得到。

背景知识介绍:

### 1. 光学晶格

光学晶格是由相互干涉的激光束形成的空间周期性结构,类似于固体晶格中的原子排列。利用光学晶格可以在微观尺度精确控制和操纵冷原子,为研究量子多体系统、进行量子模拟提供了强大的平台。通过调整激光的参数,可以模拟复杂的物理现象,如量子相变和超流体性。光学晶格在现代量子物理和量子信息科学中具有重要地位。

### 2. 激发态

激发态是指微观粒子(原子或分子)吸收一定的

能量后,被激发到较高能级但尚未电离的状态。粒子从激发态返回到基态时会释放能量,比如以光的形式。激发态在原子、分子的光谱学,以及量子力学的多个领域中都有重要作用,是研究物质性质和相互作用的关键概念。

### 3. 泡利不相容原理

泡利不相容原理阐述了一个基本的物理规律:在一个量子系统中,两个相同的费米子(比如电子、质子等带有半整数自旋的粒子)不能处于完全相同的量子态。这意味着,对于任何给定的量子系统(如一个原子),每个电子都必须具有独一无二的量子数集合。泡利不相容原理对于理解元素周期表、原子结构、以及固体物理学中电子行为的理论基础起到了决定性作用,它解释了为什么物质在宏观尺度上表现出稳定的结构和独特的化学性质。

### 4. 量子态

在量子力学中,量子态描述了一个孤立系统的状态,包含了系统所有的信息。它通过波函数表示,包含了粒子的位置、动量、自旋等所有可能的状态信息。量子态的演化遵循薛定谔方程,而其测量结果呈现概率性,只有在实际测量时才会“坍缩”到特定的状态。这种描述方式揭示了微观粒子的双重性质——既表现为波又表现为粒子,是量子力学研究的核心内容之一。

### 5. 里德伯原子

里德伯原子是一种特殊状态的原子,其中一个或多个电子被激发到非常高的能级,因此这些电子与原子核之间的平均距离远大于正常状态下的距离。里德伯原子的特点是它们的行为更接近于经典物理学的预测,电子轨道的尺寸和能量级差距显著增大,使它们成为研究原子物理学和量子力学原理的理想系统。

\* \* \* \* \*

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答发送至[aosai@ihep.ac.cn](mailto:aosai@ihep.ac.cn)邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。