美国各大学1983年在华招收物理研究生试题参考答案部分(上)

A. 经典物理参考答案

A1. (a) 系统的质心不动，所以

$$x_{质心}=\frac{x_{车}\cdot M+Nmx_{人}}{M+Nm}$$

$$\dot{x}_{质心}=0=\dot{x}_{车}\cdot M+Nm\dot{x}_{人}$$

令 $V_{车}=\dot{x}_{车}$， 而 $\dot{x}_{人}=V_{车}-V_{相对}$

故 $V_{车}=\dfrac{Nm}{M+Nm}V_{相对}$.

(b) 从 n 个人到 $n-1$ 个人的情形.

令 $V_n=$ 车上有 n 个人的速度，

$P_n=$ 车上有 n 个人的动量$=MV_n+nmV_n$

第 n 个人从车上跳下去后

$$P_{n-1}=MV_{n-1}+m(n-1)V_{n-1}+m(V_{n-1}-V_r)$$

无外力作用到该系统，所以 $P_{n-1}=P_n$，即

$$(M+nm)V_n=(M+nm)V_{n-1}-mV_r$$

$$V_{n-1}=V_n+\frac{mV_r}{M+nm}$$

因 $V_N=0$，初始时，车和上面的N个人均处于静止状态，则

$$V_{最后n=0}=\sum_{n=1}^{N}\frac{mV_r}{M+nm}$$

(c) 显然，(b) 的情形给出最大车末速(因为 $M+nm\leqslant M+Nm$)

A2. (a) k 是玻尔兹曼常数，Ω是组态的统计权重，E 的范围是 0 到 $2\mu HN$，令 $2\mu H=\epsilon$，$0\leqslant E\leqslant N\epsilon$

(b) 因为粒子是可区分的，在N个粒子中选 n 个的方法有

$$\Omega=\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

于是，

$$S=k\ln\left[\frac{N!}{n!(N-n)!}\right],$$

当 $n=0$，$n=N$ 时，$S=0$ 我们期望 $S_{极大}$ 出现在 $n=\dfrac{N}{2}$

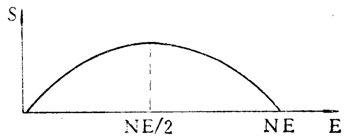

图 1

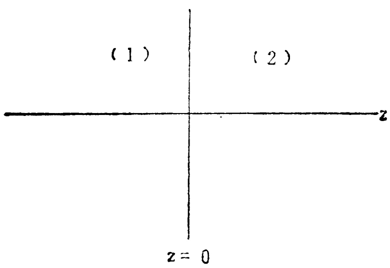

图 2

时，于是，(c) $\ln n!=\sum\limits_{m=1}^{n}\ln m\cong\int_1^n\ln x dx$

$$=n\ln n-n+1\cong n\ln n-n$$

(d) $S/k=N\ln\left(\dfrac{N}{N-n}\right)-n\ln\left(\dfrac{n}{N-n}\right)$,

$$\frac{dS}{dn}=0,\ \ 导至\ \ 0=\ln\left(\frac{N-n}{n}\right)$$

故 $S_{极大}$ 在 $n=N/2$ 处.

(e) 因为 $E=ne$，$S\sim E$ 曲线和 $S(n)$ 具有相同形状，$S_{极大}$ 发生在$E=N\epsilon/2$处(见图 1). 超过 $E=\dfrac{N\epsilon}{2}$，$\dfrac{\partial S}{\partial E}<0$.

由热力学第一定律知 $dE=-dW+dQ$，$dE=-dW+TdS$

故$\dfrac{\partial E}{\partial S}=T$，在此 $dW=0$ $\dfrac{dS}{dE}=\dfrac{1}{T}$. 因$\dfrac{dS}{dE}<0$，则 $T<0$.

(f) 足够大的E时，每个粒子的能量是有限的(即 $E=2\mu H$). 在气体情形，单个粒子能量没有这种上限约束，熵是E的单调增加函数.

A3. (a) 在边界上声压必须连续，声速也必须连续，否则边界就是不可渗透的，

入射波(压力波) $Ae^{i\omega t-ikz}$,

反射波 $A_re^{i\omega t+ik_1z}$，透射波 $Be^{i\omega t-ik_2z}$

在 $z=0$ 处，压力连续性给出 $A+A_r=B$ (1)

利用速率条件，位移波有以下关系 $P=-\rho C^2\dfrac{\partial\xi}{\partial z}$

式中 $P=$ 在时间 t，位置 z 处的振幅(压力).

$\xi=$ 在时间 t，位置 z 处的位移振幅. $\rho=$ 密度

于是，$\dfrac{\partial\xi}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho_{1,2}C_{1,2}^2}Ce^{i\omega t\pm ik_{1,2}z}$，式中 C 是 A，A_r 或 B.

利用 $\omega/k=C$，有 $\dot{\xi}_A=\dfrac{A}{\rho_1C_1}e^{i\omega t-ik_1z}$

$$\dot{\xi}_{A_r}=-\frac{A_r}{\rho_1C_1}e^{i\omega t+ik_1z},\ \dot{\xi}_B=\frac{B}{\rho_2C_2}e^{i\omega t-ik_2z}$$

现在 $z=0$ 处，速度连续，所以

$$\dot{\xi}_A(z=0)+\dot{\xi}_{A_r}(z=0)=\dot{\xi}_B(z=0)$$

$$\frac{A}{\rho_1C_1}-\frac{A_r}{\rho_1C_1}=\frac{B}{\rho_2C_2}\qquad(2)$$

联立(1)，(2)式得

$$A_r=A\frac{\rho_2C_2-\rho_1C_1}{\rho_1C_1+\rho_2C_2},\ B=\frac{2A\rho_2C_2}{\rho_1C_1+\rho_2C_2}$$

A4. (a) 半径为 r 的圆球内的尘埃质量为

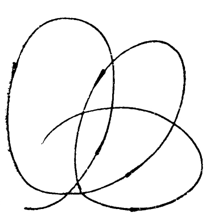

图 3

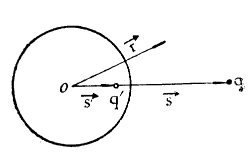

图 4

$$M_{尘} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

引起的引力为 $F' = -M_{尘} \cdot M\dfrac{G}{r^2} = -\dfrac{4}{3}\pi\rho G M r.$

(b) 在柱坐标下写出 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$,

$$M\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} - mKr + mr\dot{\theta}^2$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

这是中心力的问题. 角动量是运动常数,所以

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{mr^3}$$

径向方程为 $m\ddot{r} = -\dfrac{GMm}{r^2} - mKr + \dfrac{L^2}{mr^2}$

在特殊情况下 $K=0$ 圆形轨道由

$m\ddot{r} = 0 = -\dfrac{GMm}{r_0^2} + \dfrac{L^2}{mr_0^3}$, $r_0 = \dfrac{L^2}{GMm^2}$. 给出.

(c) 一般情形,圆形轨道的 r_0 是 $m\ddot{r} = 0$ 的解. 或

$-\dfrac{GMm}{r_0^2} - mKr_0 + \dfrac{L^2}{mr_0^3} = 0$ 在 r_0 处展成径向表式

令 $\eta = r - r_0$, $\ddot{\eta} = \ddot{r}$, $r = \eta + r_0$

$$m\ddot{\eta} = -\frac{GMm}{r_0^2\left(1+\dfrac{\eta}{r_0}\right)^2} - mKr_0\left(1+\frac{\eta}{r_0}\right) + \frac{L^2}{mr_0^3\left(\dfrac{\eta}{r_0}+1\right)^3}$$

因为 $\eta/r_0 \ll 1$,

$$m\ddot{\eta} = -\frac{GMm}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\eta}{r_0}\right) - mKr_0\left(1+\frac{\eta}{r_0}\right) + \frac{L^2}{mr_0^3}\left(1 - \frac{3\eta}{r_0}\right)$$

利用 r_0 定义 $m\ddot{\eta} = \dfrac{2\eta}{r_0}\dfrac{GMm}{r_0^2} - \dfrac{3\eta}{r_0}\dfrac{L^2}{mr_0^3} - mK\eta$

$$\ddot{\eta} = -\left[\frac{L^2}{m^2r_0^4} + 3K\right]\eta$$

这是具有角频率 $\omega_r = \sqrt{\dfrac{L^2}{m^2r_0^4} + 3K}$ 的谐振子方程.

所以轨道像椭圆的进动曲线. 径向振荡频率比轨道频率稍快一些. 在 ρ 的一级情形下,轨道频率和尘埃自由问题一样(小的径向振荡),即 $\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr_0^2} = \omega_\theta.$

进动频率 $\omega_p = \omega_k - \omega_\theta = \dfrac{3}{2}\dfrac{mKr_0^2}{L}$

为了用 ρ, G, m, r_0 表示 ω_p, 用 $K=0$ 情形的 L 表式

$$L = \sqrt{GMm^2r_0}$$

$$\omega_p = \frac{3}{2}m\frac{4\pi}{3}\rho G\frac{r_0^2}{\sqrt{GMm^2r_0}} = 2\pi\rho\left(\frac{r_0^3G}{M}\right)^{1/2}.$$

(d) 因径向振荡比轨道旋转率为快,故椭圆在与轨道旋转相反方向上进动. 见图 3 示

A5.(a) 这一问题的对称性提示了一种镜像法

在 0 与 q 之间的直线上取一像,如图 4 示. 静电势(高斯制)可写成 $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q}{|r\hat{n} - s\hat{n}'|} + \dfrac{q'}{|r\hat{n} - s'\hat{n}'|}$

$$\left[\hat{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r},\quad \hat{n}' = \frac{\boldsymbol{s}'}{s'} = \frac{\boldsymbol{s}'}{s}\right],$$

在 $r = a$ 处(希望 $\phi(a) = 0$)有

$$\phi(a) = \frac{q}{a\left|\hat{n} - \dfrac{s}{a}\hat{n}'\right|} + \frac{q'}{s'\left|\hat{n}' - \dfrac{a}{s'}\hat{n}\right|}$$

如取 $q/a = -\dfrac{q'}{s'}$, $s/a = \dfrac{a}{s'}$, 此式恒等于零.

因此 $\phi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}|} - \dfrac{(a/s)q}{\left|\boldsymbol{r} - \dfrac{a^2}{s^2}\boldsymbol{s}\right|}.$

(b) 对于一种均匀的电介质 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\left(\dfrac{\rho}{\epsilon}\right)$

其解是一样的,只是 ϕ 式中出现一个因子 ϵ, 即

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}|} - \frac{(a/s)q}{\left|\boldsymbol{r} - \dfrac{a^2}{s^2}\boldsymbol{s}\right|}\right]$$

A6. (a) 将电容链和电阻链用两个等价终端网络代替

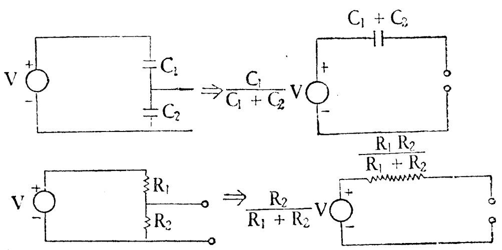

图 5 (a)

在实际电路上,终端是联接在一起的,所以

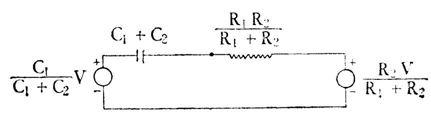

图 5 (b)

应用柯什霍夫定律,

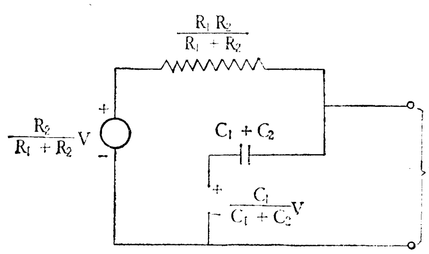

图 5 (c)

$$I\left[\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} - \frac{1}{j\omega(C_1 + C_2)}\right]$$

$$= \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right]V$$

$$I = \frac{j\omega[R_2(C_1+C_2) - C_1(R_1+R_2)]}{R_1+R_2+j\omega(C_1+C_2)R_1R_2} V.$$

$$V_{出} = I\frac{1}{j\omega(C_1+C_2)} + \frac{C_1}{C_1+C_2}V$$

$$\frac{V_{出}}{V} = \frac{C_1}{C_1+C_2} + \frac{R_2(C_1+C_2) - C_1(R_1+R_2)}{(C_1+C_2)[R_1+R_2+j\omega R_1R_2(C_1+C_2)]}.$$

(b) 检验(a)部分的等效电路，可见两电压源相等，故就无电流流动，而输出电压将不与 C_1+C_2 的(复)阻抗有关.

于是，
$$\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{C_1}{C_1+C_2},$$

所以
$$R_2C_2 = R_1C_1$$

选取 $R_2C_2 = R_1C_1$ 检验 (a) 的答案

$$\frac{V_{出}}{V} = \frac{C_1}{C_1+C_2} \quad \left(= \frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$$

(c) 显然,所有的频率都有相同的衰减(无相移)

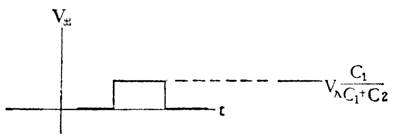

图 6

(d) $R_1C_1 > R_2C_2$

这是等价于分容器比分阻器衰减的少. 经过一个阶跃函数后立即分容器占优势,后来输出弛豫到分阻器的值,所以有

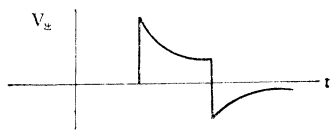

图 7 (a)

$R_1C_1 < R_2C_2$，类似的论证给出

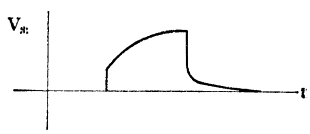

图 7 (b)

A7. (a) (1) 热力学第一定律 $dE = dQ - dW$

$$dQ = dE - t dx$$

dQ 可写成 $dQ = \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_x \delta T + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T \delta x - t\delta x$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T - t \qquad (1)$$

Q 不是一个状态函数,方程(1)是有意义的. $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_T$ 表示在温度 T 固定下,带长改变 dx，为保持恒温须给橡皮带的热量.

用熵变表示
$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C_x dT}{T} + \frac{L dx}{T}.$$

$L = L(x, T)$ 是保持 T 不变,每增加单位长度所输入的热量,

显然有
$$\frac{C}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x \text{ 和 } \frac{L}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T.$$

因 S 是一个状态函数,于是有 $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial x} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial T}$.

所以 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C_x}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{L}{T}\right)$, $\frac{1}{T}\frac{\partial C_x}{\partial x} = \frac{1}{T}\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{L}{T^2}$

$$\left(\frac{\partial C_x}{\partial x}\right)_T = \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_x - \frac{L}{T} \qquad (2)$$

利用内能变化有 $dE = dQ - dW$, $dE = C_x dT + L dx + t dx$

所以 $\frac{\partial E}{\partial T} = C_x$, $\frac{\partial E}{\partial x} = L + t$

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial T}(L+t) = \frac{\partial L}{\partial T} + \frac{\partial t}{\partial T} \qquad (3)$$

令(2)和(3)式右边相等得

但是
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x_T}\right) = L = -T\frac{\partial t}{\partial T} \qquad (4)$$

将(4)代入(1)式,可解出 $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = t - T\frac{\partial t}{\partial T}$

因 t 是与 T 成线性,所以 $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = 0$.

(2) $\frac{\partial C_x}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{l}{T}$ 而 $L = -T\frac{\partial t}{\partial T}$

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} = -\frac{\partial t}{\partial T} - T\frac{\partial^2 t}{\partial T^2} + \frac{\partial t}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 t}{\partial T^2},$$

但 t 是 T 的线性函数,所以$\left(\frac{\partial C_x}{\partial x}\right)_T = 0$

(3) 由 $\left(\frac{\partial C_x}{\partial x}\right)_T = 0$ 得 $C_x(x, T) = C_x(l_0, T)$

已知 $C_x(l_0, 7) = K$(常数)所以 $C_x(x, T) = K$.

(4) $dE = \frac{\partial E}{\partial T}dT + \frac{\partial E}{\partial x}dx$, 已有 $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$,

所以
$$dE = \frac{\partial E}{\partial T}dT = C_x dT = K dT,$$

$$E = E(T_0) + K(T - T_0)$$

(5) $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C_x dT}{T} + \frac{L dx}{T}$

$$= C_x\frac{dT}{T} - A\left[\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right]dx$$

积分给出 $S = K\ln T - A\left[\frac{x^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{x}\right] +$ 常数

(b) 由于橡皮带是绝热地被拉长的,

$$dQ = dS = 0 \text{ 和 } S_{终} = S_{初}$$

$$K\ln T_f - A\left[\frac{(1.5)^2 l_0^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{1.5 l_0}\right]$$

$$= K\ln T_0 - A\left[\frac{l_0^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{l_0}\right]$$

$$K\ln\frac{T_f}{T_0}=Al_0\left[\frac{2.25}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-1\right]\cong 0.292Al_0,$$

所以
$$T_f\cong T_0e^{\left(0.292\frac{Al_0}{K}\right)}.$$
（待续）

（陈崇光 译 黄 涛 校）