美国各大学 1985 年在华招收物理研究生试题

A 经 典 物 理

（ 4 小时，任作 6 题）

A1 三个相同的圆柱体各绕它们彼此平行的中心轴以角速度（Ω）旋转，并保持轴平行直到它们接触到一起为止．不论哪个柱体的接触线对相邻的柱体均不打滑时，达到一种新的稳态．

问现在剩下多少原先的自旋动能？（第一柱体与第二柱体和第二柱体与第三柱体接触的精确次序是无关紧要的．）

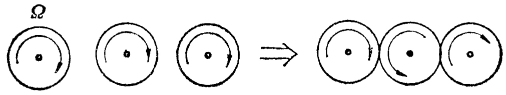

图 1 （旋转轴均垂直纸面）

A2 一个刚体结构由联结于一点的无质量棒组成，并有每一质量为 m 的两质点联于棒端，如图所示刚体系统支撑在固定点 D 上，并以小的振幅前后振荡．问振动频率是多少？

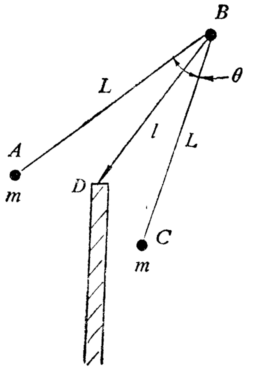

图 2

$\overline{AB} = \overline{BC} = L$ $\overline{BD} = l$

$\angle ABD = \angle DBC = \angle\theta$

A3 一个质量为 M 半径为 R 的重星体以速度 $\boldsymbol{v}$ 通过质量密度为 ρ 的稀薄气体．如果由于引力场的作用把所有碰撞星体表面的气体原子都被星体捕获．求在以下近似下，星体所受到的阻力．(1) 原子的热运动相对于 $|\boldsymbol{v}|$ 是可忽略的．(2) 原子间的彼此相互作用是可忽略的

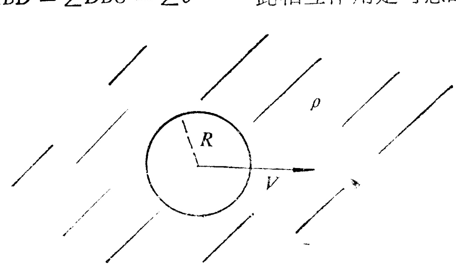

图 3

A4 靠近地球表面，大气有以下的性质(近似地)：一缓慢增大的空气体积，在无热流流入或逸出时，释放此空气体积，它将既不上升也不下降（大气几乎是不“对流的”）．在地球表面的大气压（p）是 P_0，而温度(T) 是 T_0．在增加高度 z 的情况下．

$$P = P_0(1 - \alpha z)$$

$$T = T_0(1 - \beta z)$$

求按 T_0、地球表面的重力加速度来表示 α 和 β (假定空气是由 4/5 N_2 和 1/5 O_2 组成的，又假设 T_0 是足够地低以致于这些分子的振动不被激发，但是对于它们的转动来说又是足够高，以致于可以按经典问题来处理)．

A5 发现一种奇异的物质，联系压力（P），体积（V）和温度（T）的状态方程呈

$$P = \frac{AT^3}{V} \quad 形式$$

另外一系列的实验测定这种物质的热性质，发现它的内能（U）与体积有关，其形式为

$$U = BT^n \ln(V/V_0) + f(T)$$

其中 B，n 和 V_0 是常数，而$f(T)$ 是只依赖于 T 的未被测定的函数．

B 和 n 必需为何值？

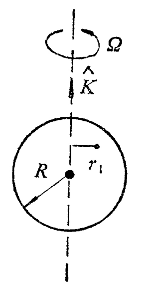

图 4

A6 一个具有半径为 R 的磁化的不带电荷的球导体，在 $\boldsymbol{r}$ 点的内部磁场为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = Ar_{\perp}^2\hat{k}$$

式中 A 是一常数，$\hat{k}$ 是通过球心的一常数单位矢量，$r_{\perp}$ 是到 $\hat{k}$ 轴的距离．

(在笛卡尔坐标系中，$\hat{k}$ 是在 z 方向上，球心在原点处，而 $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$)．现在球绕 z 轴以角频率 Ω 作（非相对论性）自旋．

a) 在实验室系中，自旋的球体的内部存在的电场有多大?

b) 电荷分布是什么?（不必计算表面电荷）

c) 由一个静态伏特计，其一端联到自旋球的一极另一端的电刷与球的运动赤道相接，测量的电压降是多少?

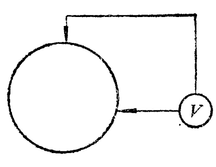

图 5

A7 一电路由两个电阻(电阻为 R_1 和 R_2)、一个单电容器(电容为 C) 和一个可变电压源 (V) 联在一起如图所示

a) 当 $V(t) = V_0\cos\omega t$，问

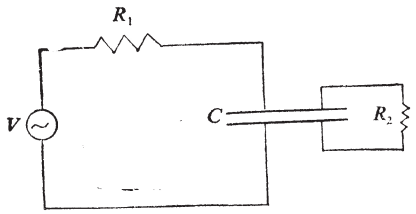

图 6

跨过 R_1 的电势降的振幅是多大?

b) 当 $V(t)$ 在 $t=0$ 时是一个很陡的脉冲,近似可写成 $V(t)=A\delta(t)$.

跨过 R 电势降是如何随时间变化的?

B 近 代 物 理

(4 小时,任作 5 题)

B1 处在一维谐振子势 $V_1=\frac{k}{2}x^2$ 的一个质量为 m 的粒子

a) 它最初处在基态,弹簧常数突然增加两倍 ($k\to 2k$),所以新的势就成了

$$V_2=kx^2$$

然后测量粒子的能量,求找到粒子处在新的势 V_2 的基态的几率是多少?

b) 弹簧常数突然按 a) 所述增加两倍,所以 V_1 突然变成了 V_2,不过新的势 V_2 下的粒子能量未被测量,相反地过了时间 τ 后,由于加倍的弹簧常数突然又回到原来的值. 问 τ 值需多大使最初的 V_1 的基态才能以 100% 的肯定性恢复?

B2 一个带负电的 π 介子(赝标量粒子: 零自旋,奇宇称)最初束缚在绕一氘核的最低能量库仑波函数. 它被氘核(一个质子和一个中子处在 $^3S_1$ 态上)所俘获并转化成一对中子:

$$\pi^-+d\longrightarrow n+n$$

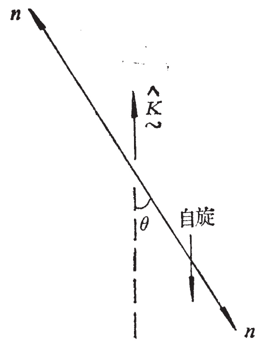

图 7

a) 问中子对的轨道角动量是多少?

b) 它们的总自旋角动量是多少?

c) 找到两个中子其自旋方向均与氘的自旋方向相反的几率是多少?

d) 如果氘核最初是 100% 被极化处于 $\hat{k}$ 方向,问有一个中子,它的自旋与最初氘核自旋方向相反的发射几率的角分布(单位立体角内)是什么?

你可以利用以下球谐函数(未归一化)

$$Y_0^0=1\quad Y_1^{\pm1}=\mp\sin\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_1^0=\cos\theta\quad Y_2^{\pm1}=\mp\sin 2\theta e^{\pm i\phi}$$

B3 宇宙中充满黑体微波辐射,平均光子能量 $\langle E\rangle\sim10^{-3}$ 电子伏. 光子的数密度 ~300/厘米^3. 很高能量的 γ 射线与这些光子相碰可以产生正负电子. 对产生截面 $\sim\sigma_T/3$,其中 σ_T 是非相对论的电子-光子散射截面 $[\sigma_T=8\pi/3(e^2/mc^2)^2]$.

a) 就这一过程所局限的宇宙中,什么样能量的 γ 射线有它们的寿命?

b) 在它们转变成 $e^\pm$ 对以前,它们要平均经过多长距离?

c) 如何同宇宙的大小作一比较?

d) 什么样的物理过程可能限制超高能质子(能量 $\geqslant10^{20}$ 电子伏)在这样相同的微波辐射区中的寿命? (假设质子-光子散射是太小了,变得不重要了.)

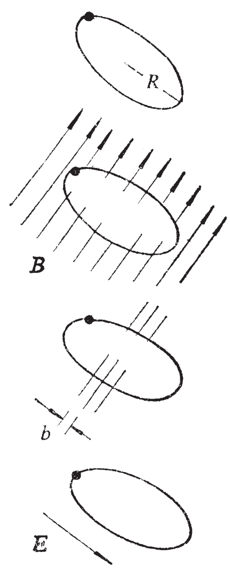

图 8

B4 一个质量 m 带电荷 q 的无旋粒子被约束在一个半径为 R 的圆上. 求以下每种情况下的允许能级(可到一个共同的附加常数)

a) 粒子的运动是非相对论性的.

b) 均匀的磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直圆的平面.

c) 以通过圆圈内相同的磁通量现在通过一半径为 $b<R$ 的螺线圈.

d) 在圆的平面内有一很强的电场 $\boldsymbol{E}(q|\boldsymbol{E}|\gg\hbar^2/mR^2)$;

e) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是零,不过电子绕圆运动是极端相对论的.

f）假设圆是用具有相同周长的椭圆来代替，只是面积减半时，情况又会怎样.

B5 有能量为 E 的非相对论性的单能平行中子束入射到厚度为 t 的平面材料板上. 在材料中，中子在均匀吸引势 V 中运动，入射束与平板的表面法线方向构成 θ 角.

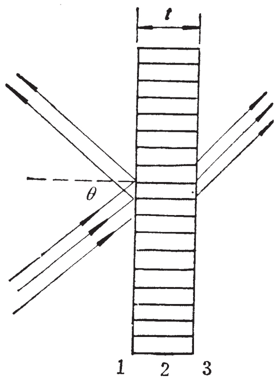

图 9

a）如果 t 是无限厚的，问中子有百分之几的入射束被反射？

b）如果 V 是排斥的和 $V=E$，又有百分之几的入射束被反射？考虑 t 为有限厚度.

B6 如果一个很小的均匀密度的带电球处在一静电势 $V(\boldsymbol{r})$ 内，它的势能是

$$U(\boldsymbol{r})=V(\boldsymbol{r})+\frac{r_0^2}{6}\nabla^2(\boldsymbol{r})+\cdots$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是电荷中心位置，r_0 是它的很小半径. “拉姆移动”可被认为对氢原子能量的微小修正，因为物理的电子是具有这一特性的.

如果 U 中的 r_0^2 项同库仑相互作用

$$V(\boldsymbol{r})=-\frac{e^2}{r},$$

相比可以认为是一很小的微扰，

对于氢原子的 $1s$ 和 $2p$ 能级的拉姆移动是多少？用 r_0 和基本常数表示你的结果. 未微扰的波函数为

$$\psi_{1s}(\boldsymbol{r})=2\alpha_B^{-3/2}e^{-r/\alpha_B}Y_0^0,$$

$$\psi_{2pm}(\boldsymbol{r})=\alpha_B^{-5/2}re^{-r/2\alpha_B}Y_1^m/\sqrt{24}$$

式中 $\alpha_B\equiv\hbar^2/m_e e^2$.

C 普通物理

（4小时，任作5题）

一些可能有用的(近似的)值：

$\hbar\sim10^{-27}$ 尔格秒

$e\sim5\cdot10^{-10}$(尔格厘米)$^{1/2}$

电子的质量$\sim10^{-27}$ 克

太阳的亮度 $\sim4\cdot10^{33}$ 尔格秒$^{-1}$

太阳的质量$\sim2\cdot10^{33}$ 克

太阳的半径$\sim10^{11}$ 厘米

$G\sim6\cdot10^{-7}$ 厘米^3 克$^{-1}$ 秒$^{-2}$

核内核子间的距离$\sim10^{-13}$ 厘米

光子被电子散射的非相对论的截面

（汤姆逊截面）

$$\sigma_T=8\pi/3(e^2/mc^2)^2=6\cdot10^{-25}\text{厘米}^2$$

C1 一平行光束垂直入射到折射系数为 n 的一个

玻璃透镜的平表面上．平表面的半径为

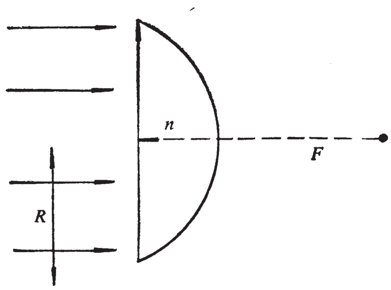

图 10

R．光线被透镜聚焦到距离平表面 F 远的一点上．

a）透镜的后表面的(严格的)方程是什么？

b）对于波长 λ 的光，当 $F\gg R$ 时聚焦点有多大？当 $R\gg F$ 时，又怎样？

c）如果入射光源是太阳(半径 $R_{\odot}$，距离 d 表面温度 $T_{\odot}$)并把一屏幕置于焦点处，当 $F\gg R$ 时，屏幕上太阳的影像有多热？当 $R\gg F$ 又怎样？

C2 a）一个运动的平面镜以速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直它的表面方向 ($\hat{n}$) 运动．一束频率为 ν 的光入射到这面镜子上．光束的入射方向与 $\hat{n}$ 方向成 θ 角．

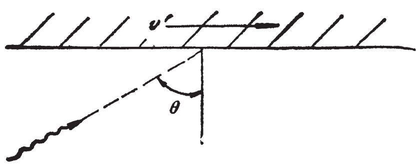

图 11

求散射光的角度和频率．（提示：你知道如何求在静止镜子的坐标系中散射光的角度和频率．）

b）假设镜子的速度 $\boldsymbol{v}$ 是在 $\hat{n}$ 方向上，反射光的频率是多少？

C3 a）估计一下冷氢压缩到它的电子为相对论性时的(电子动能≫电子的静止能量)密度．

b）在这样密度下近似的状态方程(压力作为密度的函数)是什么？电子的能量密度是多少？

c）非常粗糙地近似给出由这样高密度氢所构成的均匀密度的星体的总质量，这样高密度氢其总电子动能比总引力结合能为大．比较一下这样一个冷氢星体和太阳的引力束缚质量．

C4 一个 μ^- 介子(一个质量为 $M\sim 210m_e$ 的重电子，其中 m_e 是电子质量)被捕获到一围绕质子运动的圆轨道上．它的初始半径 $R\sim$一电子绕-质子的玻尔半径．

估计一下要多长时间(用 R，M 和 m_e 来表示)，它将俘获 μ^- 介子并辐射足够的能量而达到它的基态上．利用经典的理论说明，包括一个非相对论的加速的荷电粒子辐射功率的表式．

C5 从你所知道的有关现象的数量，从基本的物理考虑或由于你正好知道近似答案做一很粗略的数量级估计(好于 10^2 因子)：

a）液体的表面张力

b）每秒由太阳的核心发生的核反应中放出的中微子数目

c）一个碳原子核表面的电场．

d）太阳的寿命

e）金属中传导电子的速度

C6 一质量 M 半径为 R 的星体具有亮度（单位时间辐射的能量）为 L．星表面是由完全游离的低密度氢(质子质量 m_p 和电子质量 m_e)所组成．

a）估计一下使电子不被放出的辐射所带走，星体表面所应有的径向电场．(电子可作为完全自由来处理，即既不受引力也不受邻近粒子的库仑力的相互作用)

b）求出星体亮度的极大 L 值，超过此值星体表面的质子不再能靠引力束缚住．

c）从星体表面最初发出的光的波长 λ_0 的近似引力红移是多少？

d）如果星体的亮度 L 是来自低密度游离氢球对称地落到星体表面所释放出的引力能．求出落到星体上的最大可能质量率．

（注意：有些截面出现在所要求的表式中，你无需给出截面的公式，但你应该精确说明它们是如何定义的）．

（崇 光、启 明）