

黑洞的熵与信息疑难*

葛先辉 余明辉

(上海大学理学院物理系 200444)

黑洞,作为广义相对论预言并得到观测支持的一种特殊天体,一直是天文学和物理学研究的热门领域。黑洞自然地成为了物理学家们寻求统一广义相对论和量子力学的完美实验场所。在所有与黑洞相关的研究中,有一个最令人困惑且棘手的问题就是黑洞熵的微观起源问题,或者更详细地,是黑洞信息佯谬。自 Hawking 于 1976 年提出以来,它困扰了理论物理近半个世纪。数十年来,为了解开这一谜题,物理学家做出了相当大的努力并提出了许多假设与模型。如今,我们终于看了曙光——最近物理学家们在半经典引力框架下证明了黑洞信息没有丢失!这宣告了黑洞信息佯谬被初步地解决。本文从黑洞信息疑难问题的历史发展顺序来简要回顾该问题中所涉及的故事以及目前最新进展。

1. 问题的由来

故事的起点是 Bekenstein 和 Hawking 等人发展出的黑洞热力学^[1]。黑洞热力学起源于 20 世纪 70 年代。事实上,黑洞信息佯谬最早是从热力学第二定律产生的。热力学第二定律表明一个孤立系统的熵 S 不随时间而减少。然而,从黑洞的无毛定律^[2]来看,黑洞最多只能被质量 M 、电荷 Q 和角动量 J 这三个量所标记,没有其他微观态的差别,因此熵似乎不能被归在其中。这个结论在当时并没有引起太多的关注。显然,几乎所有物理学家都认为掉进黑洞的熵并不会凭空消失,可能只是以另一种形式被储存在黑洞的内部。至于它到底变成了什么,这只需要后续的研究来找到那个既可以被无毛定律所描述又包含熵的模型。

然而接下来, Bekenstein 和 Hawking 的发现将

该结论推向了一个极端。首先是 Hawking 于 1971 年证明得出,黑洞的事件视界面积 A 随时间永不减少,也被称为黑洞面积定律^[3]。随后 Bekenstein 于次年类比热力学第二定律并提出猜想:黑洞具有熵 S_{BH} 且正比于黑洞的事件视界面积。这个结论却遭到了同行的强烈批评与反驳。因为如果黑洞真的具有熵,那么就会存在温度,即热辐射。从而被视为一个热力学系统。而黑洞在当时只是被视为一个“经典系统”,是一个“只进不出的”特殊天体。任何掉入黑洞的物体都无法逃脱黑洞的引力束缚,不可能有“热辐射温度”。

时间来到 1974 年, Hawking 首次在弯曲时空的背景中引入量子场论,从数学上严格地证明了黑洞具有热辐射,即大名鼎鼎的 Hawking 辐射^[4]。这无疑是物理学的一个重大突破。黑洞确实具有温度 T_H , 同时,也确实具有熵 S_{BH} 并由其视界面积 A 决定。随后黑洞热熵又被称作 Bekenstein-Hawking 熵。一个描述 Hawking 辐射的简单清晰图像如图 1 所示。区别于经典物理中的真空概念,量子场论框架下的真空并不是“空空如也”的状态,而是处处都存在着量子涨落。量子真空中不断地创生出一对正反粒子对,随后二者很快在一起湮灭,最后又恢复到真空态。这一过程通过严格的计算表明,一对粒子对创生和湮灭的时间极为短暂。其中一个粒子与其反粒子会分开这一短暂的时间。现在我们在黑洞视界附近考虑这个过程。由于黑洞的引力效应,存在这么一种特殊情况:其中粒子对中的一个掉入了黑洞,我们称它为内部伙伴(interior partner);而另一个留在了黑洞视界外部,称为 Hawking 量子,见下面的示意图 1。对于黑洞外部的观测者, Hawking

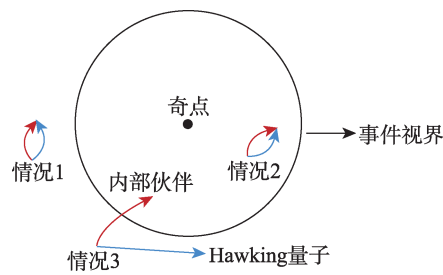


图1 Hawking辐射示意图。圆表示黑洞的事件视界,它将时空分成黑洞的内部和外部。红线和蓝线表示一对正反粒子对。主要有三种情况描述正反粒子对创生和湮灭的过程。情况1是发生在黑洞视界外;情况2是发生黑洞视界内。这两种情况对黑洞均无影响。**Hawking辐射**由情况3表示,其中内部伙伴掉入黑洞。它具有负能量使黑洞质量减少;**Hawking量子**逃逸出黑洞。它具有正能量,从而被外部观测者所看见

量子“逃逸”出了黑洞,具有正能量。根据能量守恒,掉入黑洞的内部伙伴具有负能量,这等效于黑洞失去了该粒子所具有的能量。然后根据质能方程,即黑洞的质量在这一过程中减少,于是黑洞在蒸发。

之后,Bekenstein和Hawking等物理学家根据Hawking辐射和热力学又陆续总结出了许多黑洞的热力学方面的特性。最后,类比于热力学中的四大定律,得到了类似的关于黑洞的四条定律,称为黑洞热力学四大定律。见表1关于不对外做功的系统经典热力学定律与静态黑洞的热力学定律之间的对比。

2. 黑洞信息佯谬及其影响

Hawking在发现黑洞会蒸发之后很快就意识到这个过程会导致量子力学的么正性被破坏。随后在1976年,他写了一篇文章来详细阐述Hawking辐射所带来的严重问题。这在后来也被称作黑洞信息佯谬^[5]。在弯曲时空的背景下,可以给定一个合

适的真空态以及固定经典的时空背景,从而得到从黑洞视界处离开的能流。但是,一旦考虑黑洞的Hawking辐射,那么黑洞一定会随着时间失去其质量。所以固定背景只在时间尺度相比于蒸发时间短得多的时间内成立。通过严格的数值计算^[6],我们可以得出黑洞的寿命为 $t_{\text{life}} \approx 10^{75} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 [\text{sec}]$,其中 $M_{\odot}$ 表示太阳的质量。对于一个质量大于太阳质量的天文学黑洞而言,这个寿命远远比宇宙的年龄(约138亿年)长得多。然而,对于小质量黑洞来说,其命运之最自然的一种可能性是,在黑洞完全蒸发之后,只有Hawking辐射留下。

如果Hawking辐射最终使得黑洞只留下了“热辐射”,我们马上就可以理解为什么这个过程是一个佯谬了。假设在初始时刻,黑洞是由一个纯量子态(pure state)形成。然后通过辐射出Hawking量子,直至完全蒸发。此时的最终态只有“热平衡的”Hawking辐射,是一个混态(mixed state)。那么整个蒸发过程就是一个非么正的过程:黑洞从一个纯态演化成了混态。由于混态不包含任何可观测的量子信息。于是,这就造成了信息丢失。而之所以称之为“佯谬”是因为,一方面,Hawking辐射是从基于量子力学的弯曲时空量子场论得到的结论;另一方面,么正性被视为量子力学中的一个基本原理。因此,我们从正确的理论出发却得到了两个完全相矛盾的结论。同时,倘若信息真的在黑洞蒸发过程中丢失,这也破坏物理学中许多重要的守恒定律,如粒子数守恒和几率守恒。至此,黑洞信息佯谬一经提出就引发了当时的物理学危机,并激起广义相对论和量子力学这两大物理领域的广泛讨论。

表1 两种系统的热力学定律之间的比较

	不对外做功系统	静态黑洞
第零定律	系统达到热平衡时,其温度T为一个常数。	对于一个静态的黑洞,其表面引力 κ 是一个常数。
第一定律	系统的能量E,温度T和熵S满足微分关系: $dE=TdS$ 。	对于一个静态黑洞,其质量M,表面引力 κ 和视界面积A满足微分关系: $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA$ 。
第二定律	系统的熵随时间永不减少: $\frac{dS}{dt} \geq 0$ 。	黑洞的视界面积随时间永不减少: $\frac{dA}{dt} \geq 0$ 。
第三定律	不能通过有限操作将系统温度降为零。	不能通过有限次操作将黑洞的表面引力变成零

3. 信息守恒与 Page 曲线

当时的理论物理学界对黑洞信息佯谬主要持三种观点:第一种是包括 Hawking 本人在内的物理学家认为黑洞蒸发确实会导致信息丢失,造成信息非守恒,且以目前的理论还无法找到解决方案。第二种观点是认为信息与其他物体相关联。例如,奇点的正则化^[7](通过消除黑洞的奇点使得掉入的信息不会碰到奇点而造成丢失);蒸发残余^[8](黑洞蒸发至 Planck 质量的尺度时,会停止蒸发。掉入的信息就储存在这最后残渣里);黑洞有一个大的内部来储存信息^[9]以及信息通过一些特殊的量子关联^[10]而被携带出来。这些理论直至今现在都或多或少有所瑕疵,从而不被大多数人所接受。最后一种^②,也是主流的观点。以 Don. Page 为首的物理学家们认为信息是由 Hawking 辐射携带出来从而被保留。

终于,在信息佯谬被提出后过了近 20 年, Hawking 曾经的学生 Page 于 1993 年首先对该问题给出了一个可行解决方案^[11]。Page 认为当时的同行们都忽略了一个重要的效应,那就是量子纠缠。尽管 Hawking 辐射本身是不携带信息的,但一旦我们将整个系统考虑进来,即逃逸出的 Hawking 量子与掉入黑洞的内部伙伴一起考虑。它们二者之间会相互纠缠,这就像密码加密数据一般。通过量子纠缠,辐射出的 Hawking 量子就可以携带出信息并从黑洞中逃逸出来。在量子信息中,用来量化系统之间的纠缠程度的物理量被称作纠缠熵(entanglement entropy)。类似于热力学中熵的概念,当纠缠熵越大,我们对系统的无知程度就越高,越不能详细了解系统内的信息。反之,纠缠熵越小就表明我们对系统越了解。对于一个纯态而言,其纠缠熵为零,这说明我们对该系统完全了解。因此,现在只要我们计算在黑洞蒸发过程中的纠缠熵的演化,就能知道信息到底有没有丢失了。

于是,Page 在假设黑洞蒸发是么正的前提下,计算出了 Hawking 辐射的纠缠熵在蒸发过程中的演化,并命名为“Page 曲线”^[12],见图 2。该演化呈一

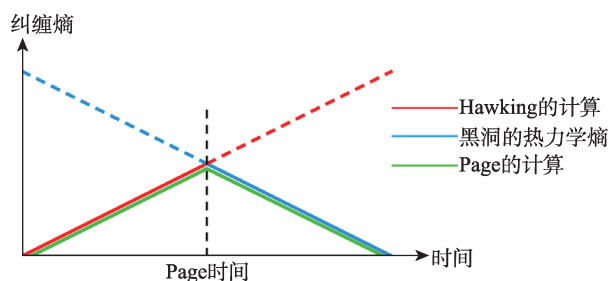


图 2 Page 曲线示意图。Hawking 辐射的纠缠熵在 Page 时间之前从零开始线性增长,这与 Hawking 当年的计算符合得很好。然而,在 Page 时间之后,二者产生分歧。纠缠熵近似于黑洞的热力学熵并随着时间最终减小至零。曲线的具体形状细节由黑洞本身的性质所决定

个 Λ 形状,这表明辐射的纠缠熵从零增加,达到最大值后又衰减至零,达到最大值的时间称为 Page 时间。由于纯态的纠缠熵为零。那么整个过程依旧是从纯态演化至纯态的,即信息守恒。

Page 曲线在黑洞信息佯谬中具有非常重要的意义,是一个里程碑式的工作。最重要的是,Page 曲线的成立前提是,假设黑洞蒸发是么正的。倘若抛弃这个么正演化假设,而从引力的角度计算出 Page 曲线,意味着黑洞信息佯谬的解决。这为该问题开辟了一条明确的道路:现在我们只要计算 Hawking 辐射的纠缠熵并画出对应的演化曲线就可以了。如果结果符合 Page 曲线,那么就说明信息守恒;否则,则说明信息丢失。同时,这也为后来物理学家们通过半经典引力计算 Page 曲线埋下了伏笔。我们将在后续的章节中讲到。

4. AdS/CFT 对偶与全息纠缠熵

20 世纪 90 年代的弦理论的重大进展使得包括 Hawking 本人在内的大多数物理学家都加入了支持黑洞么正性的阵营。事实上,我们对黑洞信息佯谬的进展主要集中在过去的 20 年。其中一个起着巨大推进作用的工作就是全息原理的发现。

4.1 AdS/CFT 对偶

1995 年,弦论创始人 Susskind 提出了一个关于物质形成黑洞的思想实验。他考虑被球面包围的含

有物质场的时空。球面的面积为该时空区域内的物质坍缩形成黑洞时的视界面面积 A 。由于物质形成黑洞是一个熵增加的过程。因此,该时空区域内的物质场的熵 S 存在一个以黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵 $S_{\text{BH}} = \frac{A}{4G_N}$ 为界的上界,即 $S \leq S_{\text{BH}}$ 。那么,在对应的量子引力理论中,描述系统自由度的信息就被储存于该球面上。这就如同全息摄影一般,将三维的场景投影在二维的照片中。这在后来也称作全息原理^[13](principle of holography)。随后,理论物理学家 Maldacena 于 1997 年发现了 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 的十维时空中的弦理论对偶于四维 $\mathcal{N} = 4$ 的 $\text{SU}(N)$ 的超对称 Yang-Mills 规范场理论。这是首次在弦理论中实现了全息对应,并基于此,他提出了 AdS/CFT 对偶^[14]。简单来说,AdS/CFT 对偶就是在高一维度时空中的引力理论等价于其边界上的量子规范场论,即 $d+1$ 维的具有常负曲率的反德西特(anti-de Sitter, AdS)时空 AdS_{d+1} 对偶于其渐进边界的无引力效应的 d 维共形场论(conformal field theory, CFT) CFT_d , 见下图 3。

对偶意味着完全等价,即一个物理系统可以有两种完全等价的描述方法,尽管两种描述方法可能区别很大。但通过对偶我们仍可以使二者联系起来。因此,当我们在引力方面的计算遇到困难时,可以通过 CFT 理论来使得问题变得十分简单,反之亦然。于是,AdS/CFT 对偶很快就成为物理学家们用于高能粒子物理、量子引力、凝聚态物理等方面

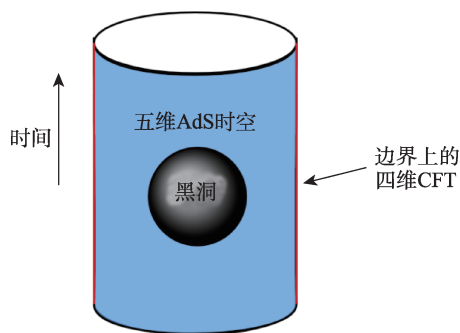


图3 AdS/CFT对偶示意图。AdS时空可以视为一个圆柱体的内部,其无穷远的边界是CFT。更进一步,处于AdS时空中黑洞的物理也可以由边界上低一维的CFT等价地描述

的一种全新计算工具。

4.2 全息纠缠熵

现在,通过 AdS/CFT 对偶,我们已经知道了问题的答案——黑洞蒸发必须是幺正的。因为边界的 CFT 理论是基于量子力学原理的,它必须满足幺正性。那么接下来就涉及具体的计算了。2006 年,日本两位物理学家 Ryu 和 Takayanagi 通过 AdS/CFT 对偶得到了计算纠缠熵的一个新公式,称为全息纠缠熵 RT 公式^[15]

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma)}{4G_N}.$$

该公式的物理意义是 d 维 CFT 边界上的子区域 A 的纠缠熵 S_A 等于 $d+1$ 维 AdS 时空中的一个曲面 γ 的面积,并且该曲面是与 A 同源^③(homologous)曲面中面积最小的那一个。因此,对于上式, γ 是余二维^④(co-dimension 2)且同源于子系统 A ,称其为 RT 面。对应的几何图形如图 4 所示。从该图可以很直观地看出,对于最简单的 AdS_3 情况,在边界选取一个子区域 A ,得到余二维的同源面 γ 就是一条测地线。该测地线可以通过连续变形变成 A ,其两端端点与 A 的端点重合,且从 A 的边界延伸至 AdS_3 内部。

RT 公式对纠缠的起源和时空关联有着深远的影响。它在某种程度上将纠缠熵“几何化”了,这也是基于“ER=EPR^⑤”^[16]精神的一个非常重要的依据。

次年,Hubeny, Rangamani 和 Takayanagi 三人将

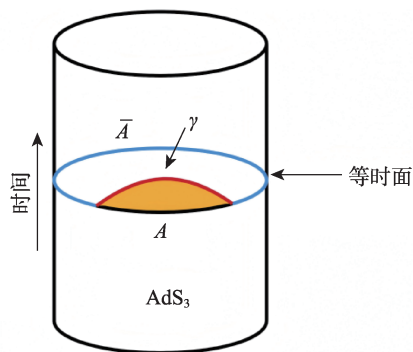


图4 RT公式示意图。图中的体时空为 AdS_3 。我们选取一个等时面并将其分解成子区域 A (黑色)及其补集 $\bar{A}$ (蓝色)。

则子区域 A 的纠缠熵 S_A 等于 γ 面(红色)的面积(在三维情况下就是其长度)

RT 公式拓展至具有时间依赖的广义时空中,提出了协变形式的纠缠熵 HRT 公式^[17]。此时的 $\text{Area}(\gamma)$ 仍然是最小曲面面积。

2013 年, Faulkner, Lewkowycz 和 Maldacena 三人给出了含有一阶量子修正的全息纠缠熵公式。简称 QRT 或 FLM 公式^[18]

$$S_A = \frac{\text{Area}(X)}{4G_N} + S_{\text{bulk}},$$

其中 X 仍是极值曲面, 而 S_{bulk} 表示极值面 X 与边界子区域围成的体区域内的物质场的纠缠熵, 见图 5 中的阴影区域。因此, 该公式考虑了体时空内有效场论中的量子涨落, 给出了全息纠缠熵的一阶量子修正。

4.3 量子极值面

2014 年, Engelhardt 和 Wall 两人提出了高阶量子修正的全息纠缠熵公式, 称为 EW 或 QES (quantum extremal surfaces) 公式^[19]

$$S_A = \min \left[\text{ext} \left(\frac{\text{Area}(X)}{4G_N} + S_{\text{bulk}} \right) \right].$$

我们将大圆括号内的面积项与量子修正项之和称为广义熵 (generalized entropy)。可以看到该公式中的大圆括号内的部分就是前面的 QRT 公式。但是, 此时的最小曲面不再是面积取得最小的 (H)RT 面, 而是先对广义熵取极值化, 对应 “ext” 的操作。然后, 再从中挑选出拥有最小值的那个曲面, 对应于 “min” 的操作。现在这个曲面称作量子极值面 (QES)。因为我们在对广义熵极值化时, 找到的极值面可能不是唯一的, 相当于得到了多阶的量子修正, 取出最小的值相当于得到了高阶修正后的纠缠熵。

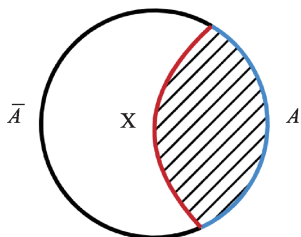


图 5 QRT 示意图。极值曲面 X 将时空分成两个子区域。量子修正来自阴影区域的纠缠熵的贡献

在这一章, 我们看到, 通过 AdS/CFT 对偶得到的全息纠缠熵是一个非常有效的计算手段。它犹如一座桥梁, 连接了纠缠与几何之间的关系。这也为我们后续计算 Page 曲线给出了指引。

5. 岛屿规则与副本虫洞

有了计算全息纠缠熵的公式, 现在离复现 Page 曲线只差最后一步。在最初的工作中, 复现 Page 曲线的计算是在二维渐进 AdS_2 时空下的 Jackiw-Teitelboim 黑洞背景下得到的。为了叙述的简便性和不失一般性, 我们在这一章以更好理解的渐进平坦黑洞为背景进行概述。

5.1 黑洞的纠缠熵

2019 年, Almheiri 等人将 QES 公式用于计算一个蒸发黑洞的纠缠熵, 并总结出了计算蒸发黑洞的纠缠熵的公式^[20]

$$S_{\text{bh}} = \min \left[\text{ext} \left(\frac{\text{Area}(X)}{4G_N} + S_{\text{bulk}}(\Sigma_X) \right) \right],$$

其中小写的下标 “bh” 代表黑洞以区分 Bekenstein-Hawking 熵。X 就是 QES (如图 6 中红点所示), 而 Σ_X (如图 6 中蓝线所示) 是 QES 与截断面® (cutoff surface, 如图 6 中橙线所示) 之间的区域。对应的几何图如图 6 所示。

我们现在把这个公式用于一个蒸发黑洞的全过程。在前期, 黑洞刚刚形成, X 向内变形不会形

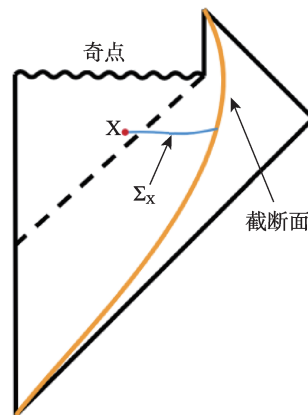


图 6 蒸发黑洞的 Penrose 图。满足广义熵极值化的 QES (红色) 位于事件视界的内部

成极值面,则X面积取得最小值的位置为 $r=0$ 处。我们称此面为消逝面(vanishing surface)。此时,公式中第一项所代表的面积项为零。只剩下第二项被截断面包围的物质熵 $S_{\text{bulk}}(\Sigma_X)$ 。一旦黑洞开始蒸发且向外的Hawking量子逃离黑洞区域时,由于内部伙伴与Hawking量子之间的纠缠,物质场的纠缠熵 S_{bulk} 不再为零并随时间线性地增长。见图7。

然而,因为Hawking量子逃离黑洞会对时空有一个扰动,黑洞质量变小,这时会出现一个非平凡的曲面,称为非消逝面(non-vanishing surface)。计算表明,该曲面非常接近事件视界,在视界内侧且离视界大约只有Planck尺度的距离(如图8中的红点所示)。此时黑洞的纠缠熵同时具有了面积项 $\frac{\text{Area}(X)}{4G_N}$ 和物质场熵 S_{bulk} 。而由于扰动只发生在Hawking量子蒸发出的极短时间内,物质熵 S_{bulk} 的贡献很小,因此广义熵由面积项 $\frac{\text{Area}(X)}{4G_N}$ 占主导。此时的广义熵与黑洞的Bekenstein-Hawking熵密切相关。由于黑洞视界面积随着蒸发减小,该曲面给出递减的广义熵,见图8。基于上面的讨论,我们知道使广义熵取

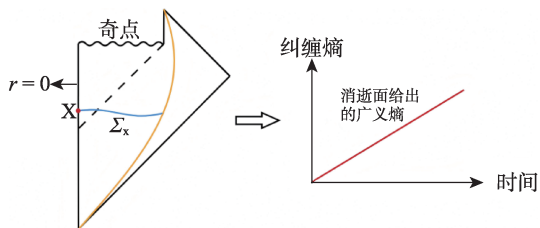


图7 黑洞的纠缠熵在早期的情况。此时的极值曲面为消逝面,导致熵一直增加。这与Hawking的计算一致,且造成信息丢失

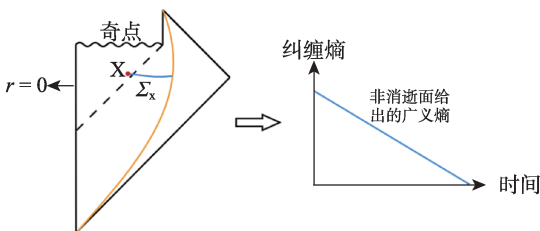


图8 黑洞的纠缠熵在后期的情况。此时的极值曲面为非零曲面,导致一直减小的熵。该结果与黑洞的Bekenstein-Hawking熵的演化一致

极值化的曲面X有两个候选者。一个是消逝面,它提供纠缠熵的增加。另一个是非消逝面,它使得纠缠熵减小。在黑洞刚刚形成的前期,只存在消逝面。它给出的贡献是使得纠缠熵从零开始单调增加至黑洞蒸发完毕。而在Hawking辐射发出的不久后,非消逝面就产生了。对应的纠缠熵以黑洞当前面积的一个较大值开始,随着黑洞蒸发而减小。因此,根据QES的最小化(min)的要求,消逝面最初代表真正的黑洞纠缠熵,直到非消逝面给出的熵更小时,由非消逝面来代表真正的黑洞纠缠熵。通过在这两个曲面之间的微妙转换,黑洞的纠缠熵严格遵循幺正蒸发的Page曲线。这个过程可见图9。

5.2 辐射的纠缠熵与岛屿公式

到目前为止,黑洞信息佯谬还未完全解决。因为最初Page描述的是Hawking辐射的纠缠熵的情况。由此依据,Almheiri等人随即提出了直接计算Hawking辐射的纠缠熵的公式,称之为“岛屿公式”或“岛屿规则”^[21]

$$S_{\text{Rad}} = \min \left[\text{ext} \left(\frac{\text{Area}(X)}{4G_N} + S_{\text{bulk}}(\Sigma_{\text{Rad}} \cup \Sigma_{\text{Island}}) \right) \right].$$

在这里,X仍然是QES。不过我们做出修改的是物质场的纠缠熵 S_{bulk} 。现在它包含了两个区域:辐射区域“Rad”和岛屿区域“Island”,见图10。现在我们解释一下该公式的物理意义。与前节类似,大圆括号内称作辐射的广义熵,它也是由面积项 $\frac{\text{Area}(X)}{4G_N}$ 与物质场的熵 $S_{\text{bulk}}(\Sigma_{\text{Rad}} \cup \Sigma_{\text{Island}})$ 之和构成。现在整个时空被分割成非连通(disconnected)的两个部分,其中 Σ_{Island} (岛屿区域I)位于黑洞的视界

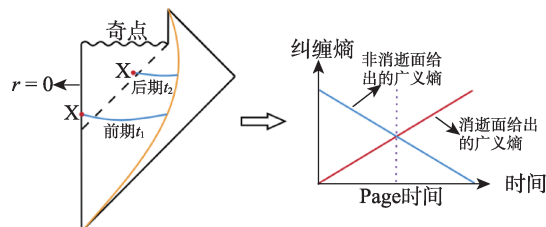


图9 蒸发全过程中黑洞纠缠熵的演化。Page曲线通过两种曲面的最小值给出

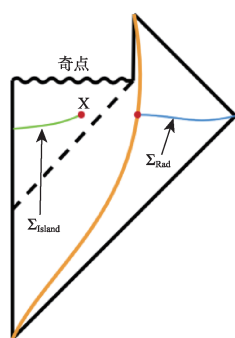


图 10 存在岛屿的 Penrose 图。X 是 QES, 它位于事件视界 (虚线) 的内部。绿色线为岛屿区域, 蓝色线为辐射区域, 红点分别代表岛屿区域和辐射区的边界。截断面上的点与 X 在同一等时面内

内部, 它与黑洞外部的 Σ_{Rad} 所代表的辐射区域 R 之间隔开。由于二者之间没有交集, 区域 I 就犹如一座处于黑洞内部的“岛屿”, 因此被称作 island。该公式的关键在于, 对于物质场的纠缠熵 S_{bulk} , 我们不仅仅考虑了辐射区 R, 还将黑洞内部的岛屿区域 I 也考虑了进来。如果我们只考虑 R, 那么计算的结果就是 Bekenstein-Hawking 熵。这也对应于我们之前的结论: 只考虑出射的 Hawking 量子, 得到的是混态的辐射。而同时考虑纠缠的内部伙伴, 则可以得到纯态的结果。也只有如此, 广义熵才能被最小化。

该公式的具体运用过程与上一小节中类似, 具体细节不再阐述, 其中也是涉及两种极值曲面, 即消逝面和非消逝面。我们可以直接简单地从图 11 看出来。事实上, 我们可以将岛屿公式看作是黑洞纠缠熵公式一种推广。

简单总结一下辐射熵的情况。在前期, $X = 0$,

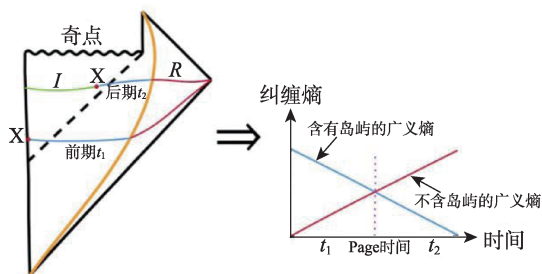


图 11 蒸发黑洞的辐射熵 Page 曲线。在前期, 不存在岛屿, 导致熵一直增加。在后期, 岛屿位于事件视界内部, 给出递减的熵。在不含岛屿和含有岛屿的两种熵之间的转变给出正确的 Page 曲线

极值面也是消逝面, 即不存在岛屿。则公式中只有辐射区的物质场熵的贡献, 导致增加的纠缠熵, 这与 Hawking 的计算结果一致。而到了后期, 以非消逝面为主导。对应的纠缠熵随黑洞蒸发完毕后再次减小至零。计算的全过程与上一小节类似。最终得到 Hawking 辐射熵的 Page 曲线。基于此, 岛屿公式被简写为

$$S_{\text{Rad}} = \min [S_{\text{gen}}(\text{without island}), S_{\text{gen}}(\text{with island})].$$

5.3 纠缠源于虫洞几何

到目前为止, 我们已经通过岛屿公式复现出了 Hawking 辐射的 Page 曲线。其中最关键的一步是我们引入了黑洞视界内部的岛屿区域。这尤其暗示了么正结果取决于黑洞的内部。虽然岛屿公式看上去是 QES 公式的简单推广。然而, 事实上, 我们可以通过欧氏路径积分的方法, 在黑洞内部中引入连通的虫洞几何来严格地证明其正确性^[22]。这里我们给出一个简化版的证明。计算纠缠熵, 有一个数学上的计算“技巧”: 我们可以先计算 n 阶的 Rényi 熵 S_n , 再对其取 $n \rightarrow 1$ 的极限来得到纠缠熵 S 。 $S_n = (1 - \partial_n) \log \text{Tr}(\rho^n)$, $S = \lim_{n \rightarrow 1} S_n = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$, 其中 ρ 是辐射的密度矩阵。可以看到, 由于计算 $\rho \log \rho$ 比较复杂。故先计算 S_n , 再通过极限来得到 S 。这个过程需要先得到 ρ 的 n 个副本 ρ^n 再取对数。因此称为“副本技巧”。考虑黑洞的几何拓扑结构, 见图 12 左边。假设黑洞由一个纯态形成。我们最终目标是计算后期辐射的纠缠熵。从初始的纯态 $|\psi\rangle$ 开始, 通过涉及蒸发黑洞的半经典几何的引力路径积分演化至末态。这给出一个引力振幅 $\langle j|\psi\rangle$, 代表从初态到一个特定的辐射态 $|j\rangle$ 。现在通过路径积分, 计算同样态的左矢来给出密度矩阵 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 。其矩阵元 $\rho_{ij} = \langle i|\psi\rangle\langle\psi|j\rangle$ 原则上由所有路径积分给出, 见图 12 右边。

由于我们已经在外部设定了初态与末态, 其中内部取决于 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$, 则求迹的结果为 $\text{Tr} \rho = \sum_i \langle i|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle$ 。而我们判断一个量子态是否为纯态

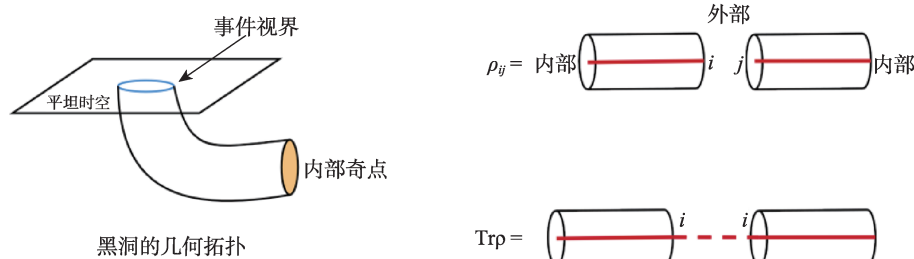


图12 左边为蒸发黑洞的几何拓扑。它在概念上类似于一个分裂的婴儿宇宙。

右边为密度矩阵及其求迹的路径积分表示。红线代表纠缠

是通过其纠缠熵是否为零来决定的。因此,我们可以定义纯度(purity): Trp^2 ,它具有如下性质

对于纯态: $\text{Trp}^2 = (\text{Trp})^2$.

对于混态: $\text{Trp}^2 \ll (\text{Trp})^2$.

之后我们通过连接引力路径积分的内部区域计算纯度。关键在于,在引力的计算中,我们必须考虑所有可能的拓扑求和。这暗示我们应该对所有可能的内部连通方式进行求和。从下面的图13中可以看出,我们有如下的两种不同的连接方式。

对于纯度的求迹, $\text{Trp}^2 = \sum_i \langle i|\psi\rangle\langle\psi|j\rangle\langle j|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle$,得出结果为图13中的两种情况。对于第一种非连通(disconnected)几何,算出的答案与Hawking的计算一致,有

$$\text{Trp}^2|_{\text{Hawking saddle}} \ll (\text{Trp})^2.$$

而对于第二种连通(connected)几何,黑洞的内部(两个态之间的虫洞)被包括在了计算中。实际的计算

结果表明

$$\text{Trp}^2|_{\text{replica wormholes saddle}} = (\text{Trp})^2.$$

因此,当副本虫洞几何占主导时,表明末态是一个纯态,于是我们就得到了么正的答案。

综上所述,我们通过引力路径积分的副本虫洞方法简单地证明了岛屿公式的正确性。需要再次强调的是,所有的计算都是包含了黑洞的内部。这也再次暗示了“ER=EPR”猜想的可能性。这也是量子引力的一个目标,即了解时空是由什么构成的。岛屿公式为我们提供了关于基本的量子自由度如何构建时空几何的非常有价值的信息。现在,黑洞已经成为了名副其实的信息来源!

6. 讨论与展望

黑洞信息佯谬一直是现代物理学中一个有趣而迷人的领域。自1976年提出以来,无数的工作都集中在一个关键点上:我们如何通过精确的引力计

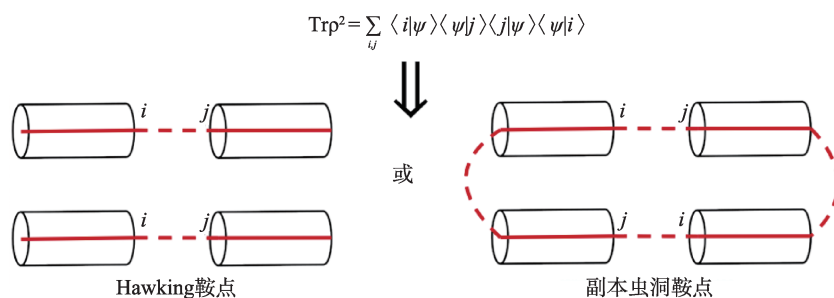


图13 计算纯度过程中的两种不同的连接方式。左边称作Hawking鞍点,其中态 $|i\rangle$ 与态 $|j\rangle$ 互相各自连接,

给出增加的纠缠熵。右边称作副本虫洞鞍点(replica wormholes saddle),其中 $|i/j\rangle$ 与态 $|i/j\rangle$ 相互连接,

它们之间的内部形成了一个连通的虫洞几何

算来实现理想化的么正结果?直到最近,这个问题的圣杯已经被发现了。确切地说,Page 曲线的再现并没有带来量子引力的额外的部分,而是完全在半经典的框架下实现的。岛屿公式为我们提供了全新的见解,告知了我们关于黑洞的内部。然而,它留下了一个未解决的问题:如何直接从引力描述中计算具体的 S 矩阵的矩阵元或密度矩阵。虽然我们讨论了如何计算 Hawking 辐射的纠缠熵,但没有计算它的精确量子态。这也是黑洞信息的一个重要方面,为什么不同的初态导致了同样的末态?在这个问题中,不同的初态对应不同的黑洞内部。虽然我们在引力中发现辐射的末态同样包含了内部,给出的解释是,在辐射中的复杂计算可以创造通向内部的虫洞将存储的信息给提取出来。但对于“ER=EPR”的证明还缺少强有力的数学证明。另一方面,我们尚未理解的是截断面,它超出了我们固定时空的观点。更完整的理解需要允许引力在整个时空任何地方波动。总之,我们简单地从历史路线回顾了黑洞信息佯谬,这些研究涉及在过去几十年中几个不同领域,如高能物理,引力理论,量子信息,凝聚态物理理论等。我们以 Hawking 辐射为开端开始,一直到近年来所提出的最新理论作为初步可行的解决方案。这些研究创造了超出它们的视野,这不仅为引力背景下的量子力学提供了令人兴奋的见解,而且以黑洞为出发点,指引着我们一步一步地向量子引力迈进!

尾注

* 国家自然科学基金项目(12275166, 12311540141)

- ① 为了与更严格的计算自洽,这里我们乘了一个因子 10^5 。
- ② 本文只给出了主要的三种观点。当然还存在一些其余选项,比如有效信息丢失等。但这些观点都不是主流,我们不在这里做详细讨论。
- ③ 与 A 同源的曲面指的是与子区域 A 具有相同的边界,且可以通过连续变换变形至曲面 A 的曲面。
- ④ 余二维指 γ 面的维度数目比时空的维度少 2。
- ⑤ ER 指连接两个史瓦西时空的爱因斯坦-罗森桥(Einstein-Rosen bridge); EPR 指爱因斯坦-波多尔斯基-罗森(Einstein-Podolsky-Rosen)在讨论量子力学时提出的一个思想实验,又称为 EPR 佯谬。

- ⑥ 由于我们在蒸发黑洞中考虑了 Hawking 辐射对时空的反作用(back-reaction),所以 Hawking 辐射被认为是从截断面上发射的,而不是从事件视界上发射的。

参考文献

- [1] 赵峥. 黑洞的热性质与时空奇异性——零曲面附近的量子效应 [M]. 第二版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2016.
- [2] CARTER B. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom [J]. Phys Rev Lett, 1971, 26: 331.
- [3] HAWKING S W. Gravitational radiation from colliding black holes [J]. Phys Rev Lett, 1971, 26: 1344.
- [4] HAWKING S W. Particle creation by black holes [J]. Commun. Math. Phys., 1975, 43: 199-220.
- [5] HAWKING S W. Breakdown of predictability in gravitational collapse [J]. Phys. Rev. D, 1976, 14: 2460-2473.
- [6] J. Abedi et al. Quantum Black Holes in the Sky [J]. Universe 6 (2020) 3, 43.
- [7] A. Ashtekar and M. Bojowald, Black hole evaporation: A paradigm [J]. Classical Quantum Gravity 22, 3349 (2005);
L. Modesto, Disappearance of black hole singularity in quantum gravity [J]. Phys. Rev. D 70, 124009 (2004);
S. A. Hayward, Formation and Evaporation of Regular Black Holes [J]. Phys. Rev. Lett. 96, 031103 (2006).
- [8] R. J. Adler, P. Chen, and D. I. Santiago, The generalized uncertainty principle and black hole remnants [J]. Gen. Relativ. Gravit. 33, 2101 (2001).
- [9] M. Christodoulou and C. Rovelli, How big is a black hole? [J]. Phys. Rev. D 91, 064046 (2015);
Y. C. Ong, Never judge a black hole by its area [J]. J. Cosmol. Astropart. Phys. 04 (2015) 003.
- [10] G. T. Horowitz and J. Maldacena, The black hole final state [J]. J. High Energy Phys. 02 (2004) 008;
J. Smolin and J. Oppenheim, Information Locking in Black Holes [J]. Phys. Rev. Lett. 96, 081302 (2006).
- [11] D. N. Page, Information in Black Hole Radiation [J]. Phys. Rev. Lett. 71, 3743 (1993).
- [12] D N. Page, Time dependence of hawking radiation entropy [J]. J. Cosmol. Astropart. Phys., 2013, 1309 (028).
- [13] L. Susskind, The world as a Hologram [J]. J. Math. Phys. 36, 6377 (1995).
- [14] J. Maldacena, The large N limit of superconformal field theories and supergravity [J]. Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231-252 (1998).
- [15] S. Ryu, T. Takayanagi, Holographic derivation of entanglement entropy

- form AdS/CFT [J]. Phys. Rev. Lett. 96, 181602 (2006).
- [16] J. Maldacena and L. Susskind, Cool horizons for entangled black holes [J]. Fortsch. Phys. 61, 781-811 (2013).
- [17] V. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, A Covariant Holographic Entanglement Entropy Proposal [J]. J. High Energy 07, 062 (2007).
- [18] T. Faulkner, A. Lewkowycz and J. Maldacena, Quantum corrections to holographic entanglement entropy [J]. J. High Energy 11, 074 (2013).
- [19] N. Engelhardt and A. Wall, Quantum Extremal Surfaces: Holographic Entanglement Entropy beyond the Classical Regime [J]. J. High Energy 01, 073 (2015).
- [20] A. Almheiri, N. Engelhardt, D. Marolf and H. Maxfield, The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole [J]. J. High Energy 12, 063 (2019).
- [21] A. Almheiri, R. Mahajan, J. Maldacena and Y. Zhao, The Page curve of Hawking radiation from semi classical geometry [J]. JHEP 03, 149 (2020).
- [22] G. Penington, S. Shenker, D. Stanford and Z. Yang, Replica wormholes and the black hole interior [J]. J. High Energy 03, 205 (2022).
- A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian and A. Tajdini, Replica Wormholes and the Entropy of Hawking Radiation [J]. J. High Energy 05, 013 (2020).

科苑快讯

材料表面的特殊图案可预防细菌感染

研究人员已经确定,塑料表面的微观模式可显著阻碍细菌的定植,为医疗设备抗感染开辟了新的技术路径。这些表面设计破坏了生物膜的形成,可能会增强人体在感染发生之前消灭细菌的自然能力。

英国诺丁汉大学(University of Nottingham)科学家发表于《自然通讯》(*Nature Communications*)上的研究发现,当细菌细胞接触到带有凹槽图案的表面时,就会失去形成生物膜的能力。生物膜是附着在表面的粘稠结构,可以保护细菌免受人体自然免疫防御的伤害。这意味着感染可以在发生之前被阻止,还能触发免疫系统消除残留的细菌。

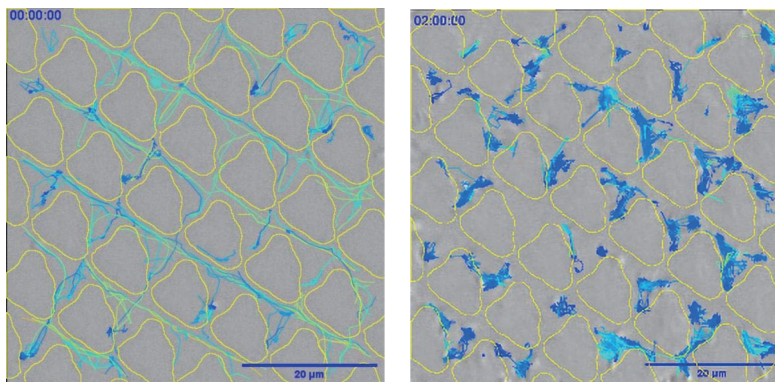
许多医疗植入物(如导尿管、呼吸管),都是由塑料

制成,通常在医院使用。一旦细菌附着在这些塑料表面并形成生物膜,就很难通过抗生素治疗。

研究组通过筛选2000多种由不同塑料制成的设计来识别阻止生物膜形成的模式,包括用于制造医疗设备的聚氨酯(polyurethane)。他们发现凸起模式中的小裂缝会困住细菌细胞,诱使其产生润滑剂,阻止其附着于塑料表面。这反过来又阻断了生物膜的形成,使宿主的免疫防御细胞更容易清除细菌,从而防止感染。

这一研究结构有助于减少与医疗设备相关的高感染率,而且物理图案表面比涂层方法更具优势,可以用于现有设备材料,并为政府医保机构节省大量经费。

(高凌云编译自2025年6月25日SciTechDaily网站)



单个细菌细胞在10微米深凹槽间通道中的游动路径;细胞在2小时后限制在缝隙间,并产生润滑物质,阻止生物膜形成