

非惯性系中单摆周期研究

吴敏芳

(宝鸡县天王高中 陕西 721305)

李宗红

(宝鸡文理学院物理系 陕西 721007)

高中物理“单摆”的考查重点是单摆周期的计算,其中尤以在匀变速运动系统中的单摆周期的计算为难点。传统方法是求出单摆的等效重力加速度 g' ,代入周期公式 $T = 2\pi\sqrt{l/g'}$ 即可。而等效重力加速度 g' 的求法是:先确定单摆在系统中的平衡位置,然后求出平衡位置时摆线对摆球的拉力 T' ,最后确定 g' , $g' = T'/m$, m 为摆球质量。上述方法能有效地解决问题,但其物理意义不明显。本文拟从动力学角度出发,在非惯性系中讨论此问题。首先就一般情况,得出一个普遍适用的公式,然后对几种特殊情况加以分析。

1. 沿倾角对 α 的斜面匀加速上滑的非惯性系

实例:放在沿斜面匀加速上滑的小车中的单摆。

解:首先确定单摆的平衡位置 θ_0 。

设小车加速度为 a ,如图 1 所示,摆球受重力

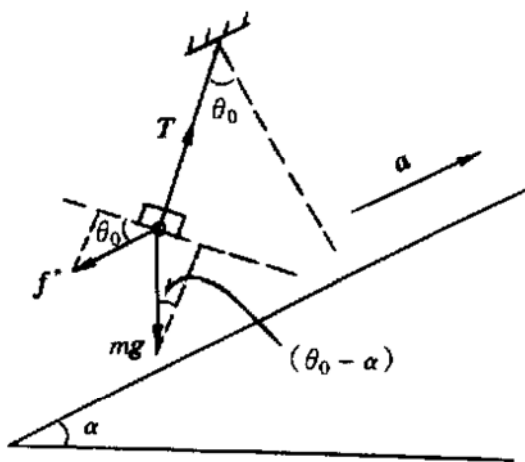


图 1

mg 、摆线拉力 T 作用, f^* 为惯性力,其大小为 $f^* = ma$ 。根据平衡位置的定义,可列如下平衡方程:

$$mgsin(\theta_0 - \alpha) = macos\theta_0 \quad (1)$$

解之得: $tg\theta_0 = \frac{gsin\alpha + a}{gcos\alpha} \quad (2)$

其次确定线性回复力 f 。

给摆球一个微小扰动,使其偏离平衡位置一微小角度 θ ,如图 2 所示。由回复力定义得:

$$f = mgsin(\theta_0 - \alpha + \theta) - macos(\theta_0 + \theta) \quad (3)$$

展开 (3) 式,并结合 (2) 式可得:

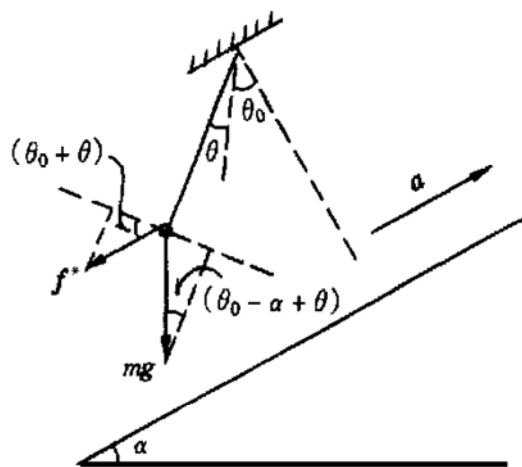


图 2

$$f = m\sqrt{g^2 + a^2 + 2agsin\alpha}sin\theta \quad (4)$$

考虑到 $\theta < 5^\circ$ 以及 θ 与 f 的方向关系,线性回复力可化简为:

$$f = -m\sqrt{g^2 + a^2 + 2agsin\alpha} \cdot \theta \quad (5)$$

应用非惯性系中牛顿第二定律,在摆球运动方向列动力学方程:

$$f = ma_{\tau_{\text{相}}} \quad (6)$$

而:

$$a_{\tau_{\text{相}}} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (7)$$

其中: $s = l\theta$, l 为摆长。

将 (5)、(7) 式代入 (6) 式并化简,得:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\sqrt{g^2 + a^2 + 2agsin\alpha}}{l}\theta = 0 \quad (8)$$

故摆球作简谐振动。其圆频率为:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2 + 2agsin\alpha}}{l}} \quad (9)$$

周期为: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2 + 2agsin\alpha}}} \quad (10)$

(10) 式即为计算单摆周期的一般公式。

2. 应用

2.1 沿斜面匀加速下滑的非惯性系

将 (10) 式中的 a 用 $-a$ 代替即可。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2 - 2agsin\alpha}}} \quad (11)$$

她用物理的情趣 引我们科苑揽胜 她用知识的力量 助我们奋起攀登

欢迎订阅《现代物理知识》

当我们从 20 世纪物理学的辉煌背景下, 迈步跨越崭新纪元的时候, 科技形势的发展和知识创新体系的建立, 对我国期刊出版事业尤其是科普工作提出了更高的要求。新世纪的《现代物理知识》, 正以崭新的面貌同喜爱她的广大读者相见。新世纪的《现代物理知识》, 继续设有物理知识、物理前沿、科技经纬、教学参考、中学园地、科学源流和科苑快讯这 7 个栏目, 还增设科学随笔栏目, 以供科技和教育工作者以及物理学爱好者抒发科学情怀、畅谈研习科学或欣赏科学的感受, 也让大家介绍一些能展现科学风采的趣闻轶事。热烈欢迎各界作者为这些栏目尤其是新栏目撰稿, 写出最新最美的文字。

改为大 16 开 64 页的《现代物理知识》, 定价每期 7.00 元, 全年 6 期 42.00 元。对直接到《现代物理知识》编辑部订阅 2002 年杂志的读者, 除了免去邮资之外, 还对最先订阅的 100 份杂志每份赠送 1 本《量子物理学: 微观绝唱》。

在邮局漏订或需要过去杂志的读者, 请按下列价格汇款到《现代物理知识》编辑部(100039, 北京 918 信箱)补订。

1992 年合订本, 18 元; 1993 年合订本, 18 元; 1995 年合订本, 22 元; 1996 年合订本, 26 元; 1993 年增刊, 8 元; 1994 年增刊, 8 元; 1994 年附加增刊合订本, 36 元; 1996 年增刊, 15 元; 1997 年合订本, 30 元; 1998 年合订本, 32 元; 1999 年合订本已售完, 尚有 1、4、5、6 期单行本, 每本 3 元; 2000 年附加增刊合订本, 38 元; 2000 年增刊, 10 元, 特赠本刊的前身《高能物理》创刊号和 1976 年第 2 期(全年仅 2 期); 《迷人的科学风采——费恩曼传》(江向东译, 2001 年 5 月获“第四届全国优秀科普作品奖”二等奖), 25 元; 《量子物理学: 微观绝唱》(《诺贝尔奖百年鉴》丛书之一, 江向东、黄艳华著, 卞毓麟、匡志强责任编辑, 上海科技教育出版社 2001 年 6 月出版), 10 元。以上所列, 均含邮资或免邮资。

特例: 沿光滑斜面自由下滑的小车中的单摆。

此时, ⑩式中的 $a = g \sin \alpha$, 故: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$ 。

2.2 水平方向匀加速直线运动的非惯性系

此时, ⑩式中的 $\alpha = 0$, 则 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$ 。

2.3 竖直方向匀加速运动的非惯性系

(1) 匀加速上升的非惯性系

此时, ⑩式中 $\alpha = 90^\circ$, 则 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}}$ 。

(2) 匀加速下降的非惯性系

此时, ⑩式中 $\alpha = -90^\circ$, 则 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a}}$ 。

特例: 单摆处于完全失重的情况下, $T =$

$2\pi \sqrt{\frac{l}{g - g}} \rightarrow \infty$, 即此时单摆不是周期性振动。

综上所述, 可直接应用 ⑩式对各种情况求解。