

简单与和谐

——谈谈乐音、音程与和弦

蔡天芳 余守宪

(北方交通大学理学院 北京 100044)

提起音乐, 大家都会感受到它无穷的魅力。它用自己独特的语言传达着世上万物的情感, 让你“看到”万物的明与暗, 美与丑, 刚与柔, 也让你感染上他们的欢喜悲愁, 体会出雄伟和悲壮, 缠绵和无奈, 甜蜜和苦涩。这样的魅力表现让人们幻觉“音”乃天外来声, 古诗有云“此曲只应天上有, 人间哪得几回闻?”

音乐究竟是什么? 它的魅力来自何处? 希腊哲学家毕达哥拉斯发现了琴弦的长短与音高有一定的关系。例如一根长为 l 的琴弦, 它所发的音高与把它截去一半的琴弦所发的音高相差一个八度。因此可以用长度分别为 $l, \frac{15}{16}l, \frac{5}{6}l, \frac{3}{4}l, \frac{2}{3}l, \frac{9}{16}l, \frac{1}{2}l$ 的七根琴弦构造七声音阶(为什么是这样的关系后文中会解释), 弹奏动人的旋律。由此得知, 我们情感体验里最隐秘的东西——音乐和我们头脑里把握得最清晰的数学有着奇异的组合。爱因斯坦在很小的时候就已经察觉到“这个世界可以由音乐的音符来组成, 也可以用数字公式来组成”。因为宇宙间的每一种物体都是按照一种特殊的频谱在振动着。而频谱正是音乐的基础之一。

下面我们来“听”几段旋律:

《兰色多瑙河》: 1 3 5 5 5 5

《小喇叭》 5 3 1 5 3 2 5 1

《歌唱祖国》 5 5 1 5 3 1 5 6 5

《少女的祈祷》 5 1 3 5 1 3- 2 2 1 1 7 6 6

你能从它们之中猜出三个数来吗? 也许你会说很简单, 就是“1, 3, 5”, 不, 不, 不, 这个谜语的谜底是“4, 5, 6”!



为什么呢?

我们知道音乐的记谱有许多方法, 而我们熟知的 1, 3, 5 仅仅是个唱名, C 调的“do”, 和 G 调的“do”, 都记为“1”, 然而这两个都记为“1”的音并不是同一个音高的。G 调的唱名“1”相当于 C 调的唱名“5”, 这两个音的音高才是一致的。在物理上音高用频率来表示, 其实“1, 3, 5”这三个音高的频率之比是“4: 5: 6”, 也就是说“4, 5, 6”这三个数字才是这几个曲子的真

正确切的内涵——物理内涵!

本文从毕达哥拉斯的发现谈起, 说说乐音的构造, 音程的和谐和感情性质。并着重介绍朱载堉的十二平均律以及和弦谐和感的物理分析。

一、简单的整数比——毕达哥拉斯的发现

公元前 6 世纪古希腊数学家毕达哥拉斯发现琴弦的长短与音高有一定的关系。他做过这样一个实验: 绷紧两根水平放置、质料相同的弦, 保持两弦的张力相同, 但长度不同。同时发音后, 实验发现, 如果他们的长度比值是两个小整数之比, 如 1: 2, 2: 3, 3: 4, 等等, 人耳听起来就觉得和谐、悦耳。

我们知道, 当拨动两端固定的弦线时, 弦线中就产生经两端反射而形成的两列反向传播的波, 叠加后形成驻波, 弦振动可能频率所对应的波长有一定的限制, 即弦长为半波长 $\frac{\lambda}{2}$ 的整数倍, 即 $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, 或者写成频率

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda} = n \frac{u}{2L}, \quad n = 1, 2, 3,$$

L 是弦线长度, u 是波速, 只与弦线的质料有关。也就是说两端固定弦所产生的基频($n=1$ 时的频率)和弦长成反比, 因此毕达哥拉斯的这个实验结论又

可表述为: 频率之比为两个小整数比的两个音, 同时发音听起来觉得和谐、悦耳。

对乐声本质的研究, 在 19 世纪法国数学家傅立叶的著作中达到顶峰。他证明了所有的乐声——不管是器乐还是声乐——都能用数学表达式来描述。因为每一个乐音就是一种周期性的振动, 按照傅立叶分析, 可以将任何一个周期性的振动分解为许多不同频率、不同相位、不同振幅的简谐振动的叠加。即:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

简谐振动即正弦振动或余弦振动的传播产生的声波叫做纯音, 实际的乐音都不是简单的纯音, 而是许多纯音的叠加。在这些叠加的简谐振动之中频率最低的叫做基频, 基频的能量往往最大, 但也不一定。频率是基频的整数倍的做法叫做谐频(或谐波, 有时也称泛音)。因此乐音是由基频、谐波(也有分音)组成的。为了显示实际振动中所包含的各个简谐振动的振动情况(振幅, 相位, 频率), 常用图线把它表示出来, 若用横坐标表示各个谐频振动的频率, 纵坐标表示对应的振幅, 就得到谐频振动的振幅分布图, 称为振动的频谱。不同乐器奏出的同一音调(相同的基频)的音色各不相同, 就是由于各种乐器奏出的音调所包含的谐频振动的振幅不同所致。图 1 是钢琴和小提琴的频谱图。

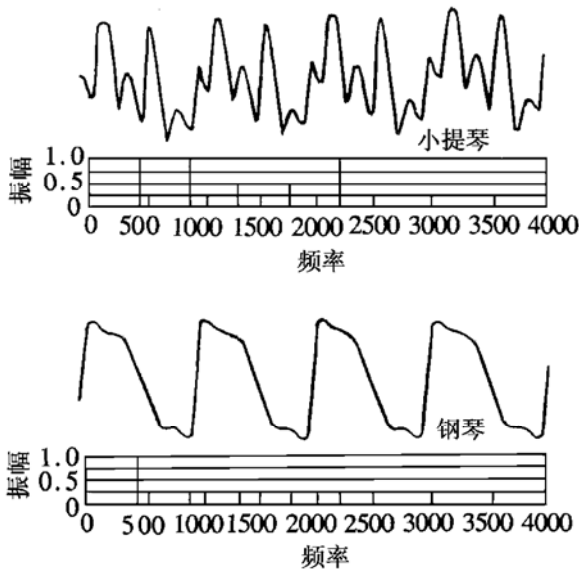


图 1 小提琴与钢琴的频谱图

从频谱图上就可以解释为什么频率之比为两个小整数比的两个音, 同时发声听起来觉得和谐、悦耳。我们看到, 同时发响的两个音之间的振动频率

之比是小整数比的时候, 它们的谐频有更多重合的地方。例如一个基频为 $f_1:f_2:f_3=400:500:600$ 的三个音, f_1 的三次谐频为 $400 \times 3=1200\text{Hz}$, 与 f_3 的二次谐频 $600 \times 2=1200\text{Hz}$ 重合, f_1 的五次谐频为 $400 \times 5=2000\text{Hz}$, 与 f_2 的四次谐频 $500 \times 4=2000\text{Hz}$ 重合。如图 2。

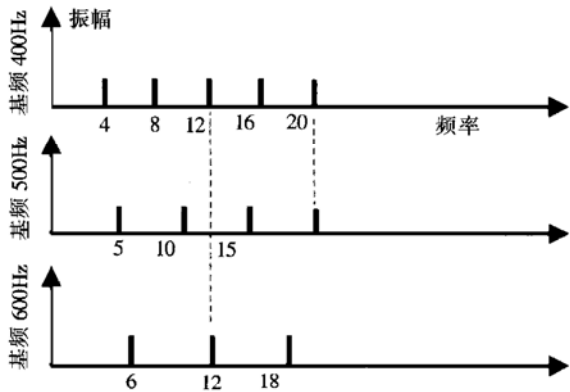


图 2 基频为 400Hz, 500Hz, 600Hz 的频谱图

并且, 据研究表明, 人类的耳朵除了基频外较易听辨的就是二倍音、三倍音和四倍音。所以当一基频为 $f_1:f_2:f_3=400:500:600$ 的三个音同时发声时, 各音的二次谐频, 三次谐频, 四次谐频被加强, 听感就变得和谐、明亮。而频率比不是简单整数比关系的音同时发声就没有上述的重叠效果, 因而听感也就无谐和感。接下来我们来探讨音高和频率之间的关系究竟如何。在这之前我们先说说乐音的构造。

二、乐音“天地”的构造——亥姆霍兹理论

现代声学的奠基人之一, 德国的物理学家亥姆霍兹曾提出: 音调(音高)、响度、音色, 是音乐的三个主观量。

简单的说音乐就是一种声波而已。而波有四个要素: 频率、振幅、相位以及时值(振动延续的时间), 这就是音乐中的客观物理量。音乐中的主观量是和频率、振幅、频谱等客观量紧密相关的。

音调可用声波的频率描述, 一般来说, 发声体的振动频率越高, 人们听起来音调也就越高; 发声体的振动频率越低, 人们听起来音调也就越低。在中频段, 频率与音调基本上有一个一一对应的关系。响度可用声波的振幅描述, 音的能量越高, 声强越大, 听起来响度就越大。

音的时值即音的长短, 由发音体的振动所持续的时间的长短决定, 发声体振动的持续时间长, 则发出的音长, 发声体振动的持续时间短, 则发出的音

短。时值的单位就是我们熟悉的“拍”子。

决定音色的主要因素是声波的频谱,所以常常可以根据频谱模仿各种音色,但它还和音的起始和结尾的瞬间状况,基频谐频在听音区的位置等等有关。

另外当几个音同时发声时,所融合成的一个和音——和弦,极大地丰富了乐音的色彩。和弦的重要意义在于它的和谐程度,一个和谐的和弦给人以安宁、平和、简单的感觉,而一个不和谐的和弦使人感到紧张、压迫、沉重。

音的以上几种性质在音乐表现中都是非常重要的,但音调和音的长短则具有更为重大的意义。因为不管你是用人声来演唱还是用乐器来演奏,用小声唱还是大声唱,虽然音的响度及音色都有了变化,仍然很容易辨认这支旋律,但如果将这首音乐的音调、音值加以改变,则音乐形成就受到严重破坏。

三、1.059463——朱载堉的十二平均律

把两个相差八度(如按简谱唱名 1~1,是一个八度音)的音顺序排列起来就成为音阶,从一个音出发,如何“生”出音阶中其他的音,有不同的生律方法。而不同的生律方法构成的音阶中的相同音名的音高可能是不同的。乐音体系中各音的绝对准确高度及其相互关系叫做音律。从古到今人们制定了多种音律,其中明朝王子朱载堉研制的十二平均律最为常用,乐器之王——钢琴就是用十二平均律来制定的。

我们知道一个八度音的频率比为 2(如 1 与 1 的频率比为 1:2),现在按等比数列将一个八度音均分为十二份,便得十二律。因此

$$\sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \dots (\text{自乘十二次}) = 2$$

则十二平均律各相邻两音之间的频率比为:

$$f_1/f_2 = \sqrt[12]{2} = 1.059463094$$

按十二平均律可以从任何音开始生出其他的音。现在我们以钢琴为例来说明。钢琴上相邻两个键(包括黑键)之间差半个音,两个半音就是一个全音。如图 3。为简单起见我们与简谱唱名对照起来看:



按十二平均律,从任何一个音开始,比该音高半个音,其频率是该音的频率乘 $\sqrt[12]{2}=1.05946$,比该音低半个音,其频率是该音的频率除 $\sqrt[12]{2}=1.05946$,依次类推可得出各音的频率。

例如钢琴上小字 a 的频率以 $f = 440\text{Hz}$ 为准(是国际标准音高),我们可以推算出钢琴小字 c 的频率: c^1 比 a^1 低, a^1 下方的第九键为 c^1 , (见图 3),于是有:

$$f_{c^1} = f_{a^1} / (\sqrt[12]{2})^9 = 261.63\text{Hz}$$

现在我们来看一看前面我们的“谜语”。那几首曲子中明显都包含有一个大三和弦,所谓大三和弦就是一个频率比为 4:5 的大三度再叠加一个频率比为 5:6 的小三度(用唱名来表示如 1 3 5)。这个大三和弦中三个音高的频率之比为:

$$f_1 : f_3 : f_5 = 1 : (\sqrt[12]{2})^4 : (\sqrt[12]{2})^7 \approx 4 : 5 : 6$$

这是一个多么完美的整数比啊! 所以我们的“谜语”的答案是 4, 5, 6, 它包含了这个大三和弦的物理内涵!

然而这样的惊奇还远远不止这些! 我们再来看一看下面这两种乐器的形状,为什么会有指数曲线的形状? (见图 4)

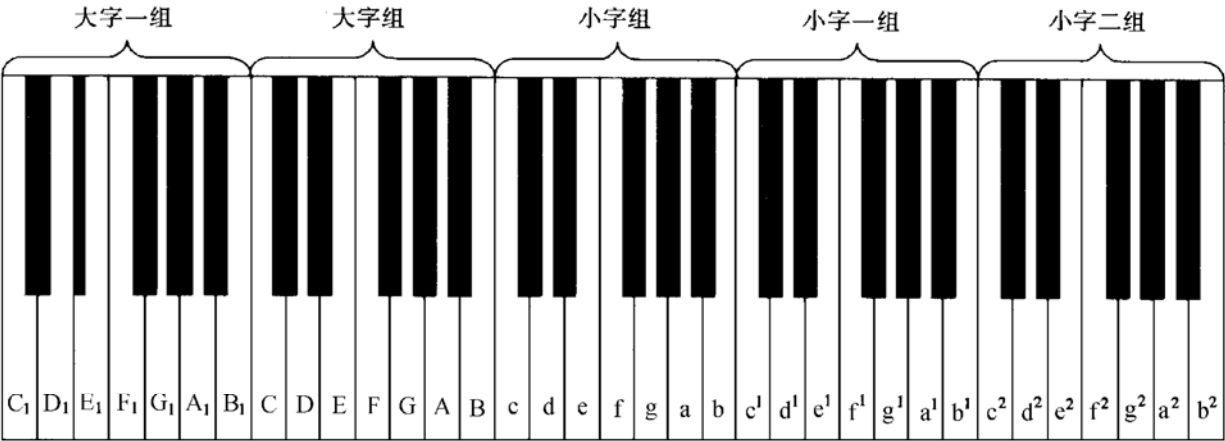


图 3 标准音和中央 C

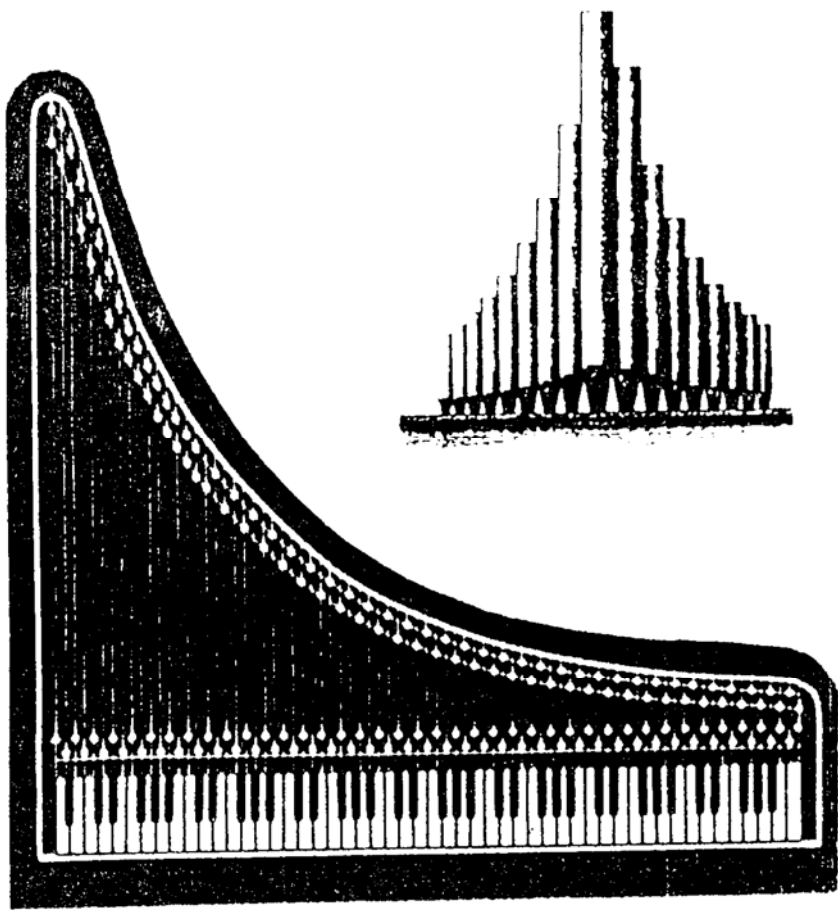


图4 平台钢琴的弦与风琴的管, 它们的外形轮廓都是指数曲线

我们知道两端固定弦所产生的基频($n=1$ 时的频率)和弦长成反比, 从一根产生C音的弦开始, 接着C的长度的 $\frac{16}{15}$ 给出B, $\sqrt[12]{2} \approx \frac{16}{15}$, C的长度的 $\frac{6}{5}$ 给出A, C的长度的 $\frac{4}{3}$ 给出G, C的长度的 $\frac{3}{2}$ 给出F, C的长度的 $\frac{16}{9}$ 给出E, C的长度的 $\frac{2}{1}$ 给出低音的C。长度由此按等比级数排列成形, 最后连成一条光滑的指数曲线!

十二平均律有很多优点, 其中之一是易于转调, 特别是在琴键乐器中可以根据需要任意使用所有的键。直到现在十二平均律与近代国际音乐中所通用的律法仍然相同, 它对我国的西方各国的音乐发展起着极其深远的影响。在朱载堉的著作“律吕精义”中称十二平均律为“新法密率”。新法是相对于我国在律学发展过程中长期所用的“三分损益法”而言的。“密率”即十二平均律计算中的公比数 $\sqrt[12]{2}$ 。朱载堉对十二平均律计算方法作了如下两段文字概括:

“创立新法: 置一尺为实, 以密率除之, 凡十二遍。”

“盖使二律黄钟为始, 应钟为终, 终而复始, 循环

无端……是故各律皆以黄钟…为实。皆以应钟倍数 1.059463 为法除之, 即得其次律也。”

德国音乐理论家亥姆霍兹在“论音乐感觉——乐理的心理”中写到: “在中国人中, 据说有个王子叫朱载堉的, 他在旧派音乐家的反对中, 倡导七声音阶。把八度分成十二个半音, 以及变调的方法, 都是这个有天才和能干的民族所发明出来的。”

四、音程的感情 和弦的谐和

如果说“乐”是人类追求的完美的精神境界, 那么自古以来“和”一直是音乐审美的最为人崇尚的理想境界, 或者说是最理想的审美范畴。而音声之“和”有着深刻的乐律学的意义, 我们就从十二平均律来作一探讨。

两个音名的音高之间的距离叫做音程, 我们来看看各音程的频率比(见表1), 由此我们可以从音程进行的物理内涵中找到协和的依据。

表1

度	半音个数	频率比	举 例
同度	0	1: 1	1 与 $\dot{1}$
小二度	1	16: 15	3 与 4 或 7 与 $\dot{1}$
大二度	2	9: 8	1 与 2 或 2 与 3
小三度	3	6: 5	3 与 5 或 6 与 $\dot{1}$
大三度	4	5: 4	1 与 3
纯四度	5	4: 3	1 与 4 或 2 与 5
纯五度	7	3: 2	1 与 5
小六度	8	8: 5	3 与 $\dot{1}$
大六度	9	5: 3	1 与 6
小七度	10	7: 4	2 与 $\dot{1}$
大七度	11	15: 8	1 与 7
纯八度	12	2: 1	1 与 $\dot{1}$

我们看到, 其中纯八度、纯五度、纯四度的振动频率比很简单, 前述中已经提到这会在人们的心理上产生完全协和的感情。纯五度、纯四度的音程感是人类最早发现并掌握的音乐谐和观念。器乐振动自然泛音列中除了基音外较易听辨的二倍音、三倍音、四倍音中就具有八度、纯五度、纯四度泛音(如图5)。大三度、小三度的频率比也较为简单, 也可以划在完全协和的音程中去。

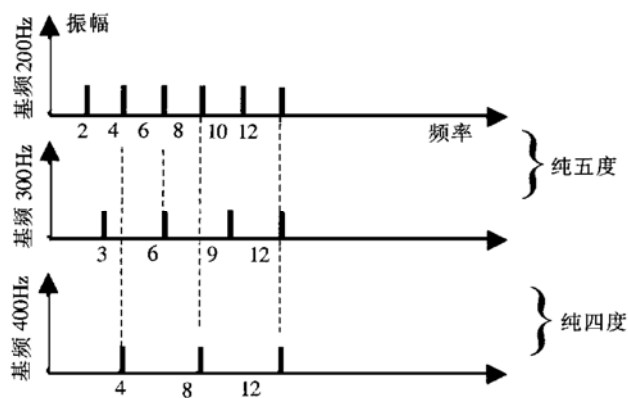


图5 纯五度、纯四度谐波重叠的情况

在上述的几个大小音程中,振动频率比例越复杂,一般就越不协和。如大小二度、大小七度都是不协和的音程。而且我们看到虽然小六度是大三度的第一转位,但是频率比不同,给人的感觉是有差异的。成大三度的两个音之间的距离比较短,从而听起来既感到协和又会有亲密无间的感觉;而小六度既给人谐和的感觉,又给人一种宽宏的感觉。因此有人比喻说相对地大三度犹如小溪、江河,而小六度犹如平静的大海。

在纯度音程和大音程的上方升或降半音,这会使人心理上产生一种不自然的感觉。例如,贝多芬在命运交响曲的一开始,先是

0 3 3 3 1—

它是一个大三度,接着是

0 2 2 2 7—

它是小三度。小三度比大三度少半个音,就使人有一种紧迫的感觉,好象命运在敲门。

一首乐曲的旋律便是不同音高的音在空间中的重叠,以及在时间上的进行。旋律虽然是由连续的单音所构成的,但是在第一音之后连续响起了第二个音,第三个音……在听者的感觉中单音的余味就重叠起来,如果这些单音之间的关系协和,那么听感也就和谐,这就是和弦的效果。所谓和弦就是按照三度或非三度音程关系排列起来的三个以上的音的综合。例如大三和弦就是一个大三度再叠加一个小三度(如 1 3 5, 4 6 1)。它们的频率比是 4:5:6,(大三和弦谐波的重叠情况参看图2)。对比小三和弦,是小三度接一个大三度(如 2 4 6, 6 1 3),他们的频率比是 10:12:15。所以从听感上,大三和弦要更和谐一些。因此大调式一般比较明亮欢快,而小调式则忧郁温柔。大调式是由七个音组成的一种调式,其中稳定音合起来成为一个大三和弦,例如我们在

文章前面提到的几个旋律大多是 C 大调的。大调式的主音和其上方的第三音为大三度,这个音程最能表现大调式的色彩。小调式也是由七个音组成的一种调式,其中稳定音合起来成为一个小三和弦,小调式的主音和其上方的第三音为小三度,这个音程最能表现小调式的色彩。

如贝多芬的《命运交响曲》: $\frac{2}{4}$ C 小调

0 3 3 3 1— 0 2 2 2 7— 7— 0 3 3 3 1 4 4 4
3 $\dot{1}\dot{1}\dot{1}$ 6— 6—

0 2 2 2 7— $\dot{7}\dot{3}\dot{3}\dot{2}\dot{1}$ — $\dot{7}\dot{3}\dot{3}\dot{2}$ $\dot{1}$ — $\dot{7}\dot{3}\dot{3}\dot{2}$ $\dot{1}$ 0
6 0 $\dot{3}$ 0

(这是典型的 3 6 $\dot{1}$ 3)

再如红色娘子军中的《娘子军歌》:

6 6 2 $\underline{3217}$ 6 $\underline{22316}$ 3•2 $\underline{611765}$
6 0

《莫斯科郊外的晚上》: $1=\frac{2}{4}$ C $\underline{6\dot{1}}$ $\underline{3\dot{1}}$ $\underline{2\dot{17}}$

3 2 6 $\underline{13}$ $\underline{55}$ 6 $\underline{54}$ 3

《小夜曲》: $1=\frac{3}{4}$ F $\underline{343}$ 6 3 $\underline{232}$

6 $\underline{20}$ 3•2 $\underline{217}$ 1-0

《天鹅湖》: $1=\frac{4}{4}$ D $\dot{3}$ $\underline{67}$ $\underline{1\dot{2}}$ $\dot{3}$ $\dot{1}$

$\dot{3}$ $\dot{1}$ $\dot{3}\cdot\dot{6}$ $\underline{16}$ $\underline{4\dot{1}}$ 6 6

可以看出这些旋律都表现了一种悲怆、温柔、忧伤的情感。

在这儿我们看到音乐谐和美的观念,都是建立在 3:2, 4:3, 5:4 整数比,纯四度、纯五度、大三度协和感的基础上的,其简单明了的数字形式本身就意味着一种美。

