掌握概念，灵活运用
——一道量子力学考研题的启示

宗　兴

（南京大学物理系99级　江苏　210093）

在量子力学中，3维各向同性谐振子是一个重要模型，它一共涉及了两个主要问题，一是能级简并度，二是在直角坐标系中的解法。其中能级简并度的重要性体现得尤为明显，因为与1维谐振子相比，相邻两能级的间距同样为 $\hbar\omega$，但不同的是，3维各项同性谐振子的能级一般是简并的，这表现在能量本征值只依赖于 n_r 和 l 的特殊组合 $N = 2n_r + l$，由此我们知道，E_N 能级的简并度为

$$f_N = (N+1)(N+2)/2 \qquad (*)$$

这是一个非常重要的概念，在学习量子力学中，我深刻体会到了它的重要性，但并非每位同学都能深刻地理解它。下面我就举出一道南京大学研究生人学考试的试题，这是一道非常典型的试题。

题目：设在绝对零度，在3维各向同性谐振子势 $V(\boldsymbol{r}) = kr^2/2$ 中，有20个自旋为1/2的全同粒子组成的系统，如果完全忽略粒子间的相互作用，这20个粒子的平均能量为3eV，问：1. 如果同样温度同样近似条件，该势中由12个这样的粒子组成的系统，其平均能量为多少eV？2. 如果势中换成质量相同但自旋为零的全同粒子17个，在同样温度同样的近似条件下，其平均能量为多少eV？

分析：初看题目，颇有些丈二和尚摸不着头脑。再细细读题分析，自旋为1/2，必是费米子，那么很多同学就会这样想，由公式

$$E_N = (N + 3/2)\hbar\omega \qquad N = 0,1,2,\cdots$$

加之每个能级上会有两个不同方向的粒子（由泡利不相容原理），于是对于第一能级 $N=0$，两个粒子就是 $3\hbar\omega$，由此类推，第二能级为 $5\hbar\omega$，于是他们列出如下表达式：

$$(3+5+7+\cdots+21)\hbar\omega = 20 \times 3\text{eV}$$

从而得到：$\hbar\omega = 1/2$

这样的解答对吗？貌似正确，但是忽略了能级的简并度。事实上，由（＊）式，我们可以知道第一能级容纳2个粒子，第二能级可以容纳6个粒子，同理，第三能级容纳12个，于是结论就很清楚了。

正确解法：由于 E_N 能级有简并度，可知

$$\frac{3}{2}\hbar\omega \times 2 + \frac{5}{2}\hbar\omega \times 6 + \frac{7}{2}\hbar\omega \times 12 = 20 \times 3\text{eV}$$

$$\therefore\ \hbar\omega = 1$$

$$E = \left(\frac{3}{2}\hbar\omega \times 2 + \frac{5}{2}\hbar\omega \times 6 + \frac{7}{2}\hbar\omega \times 4\right)/12 = \frac{8}{3}\text{eV}$$

下面我们再来看第二个问题，自旋为零，显然是玻色子。那么是否依葫芦画瓢来做？答案是否定的。这里又涉及到了一个非常重要的知识，对于玻色子，当温度接近零度时，会发生玻色－爱因斯坦凝聚，所以它们全部分布在基态。无需计算，我们就可以知道答案。

解：如果势中换成自旋为零的全同粒子，即当费米子改为玻色子时，由于发生玻色－爱因斯坦凝聚，所以它们全部分布在基态，即平均能量为（3/2）eV。

总结：上面这道典型试题可以给我们很多启发，它一反量子力学试题计算量大的特点，注重考察概念，尤其是概念的深入掌握和灵活运用，这是值得我们注意的。所以正如曾谨言教授所说，量子力学基本概念和原理的深刻内涵及其广阔的应用前景，还远未被人们发掘出来，在我们面前还有一个很大的必然王国。我们学习量子力学时，应该注重不断深化对基本概念和原理的理解，这样才能真正理解其精髓。