

经典力学中的变质量问题

王 存 茂

许均璇 况森保

王 金 东

(广州民航职业技术学院科研处 广州 510403) (南昌航空工业学院 南昌 330000) (炮兵指挥学院 河北宣化 075100)

多年来笔者在讲授大学物理的过程中,曾向上千名大学一年级学生调查了如下问题:一质量线密度为 λ 的链条沿桌边下滑(如图 1 所示),能否将长为 x 的下滑段链条作为质点应用形式为 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ 的牛顿第二定律列出 $\lambda x \mathbf{a} = \lambda x \mathbf{g} - \mathbf{T}$ 的方程呢? 几乎 100% 的学生回答说不能,理由是根据教科书上所述牛顿第二定律只适用于常质量质点,而图 1 中长为 x 的下滑段链条是一个变质量质点。一些重要文献和专著也认为经典力学中变质量物体的力学模型为变质量质点。

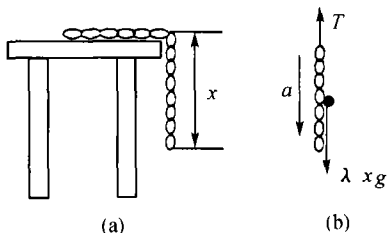


图 1

众所周知,经典力学变质量运动是一个物体连续地分出(或并入)质量的过程,例如火箭的运动、链条从桌边下滑的运动、向车厢内注入沙子或从车厢内抛出沙子的运动。传统的观点认为上述变质量运动的主体(火箭连同其内的燃料、链条和车厢连同其内的沙子)的力学模型是一个变质量质点,变质量过程是一个质点的质量随时间变化的过程。

1. 关于变质量主体的力学模型

笔者在研究之后对上述观点持否定态度,我们通过下面两个例子来分析和认识经典力学变质量主体的力学模型和变质量过程的实质。

图 2 所示为装有沙子的车厢。设想将沙子水平向后抛出,起初是一部分一部分地抛(见图 2a),对车厢连同其内的沙子这个变质量主体来说这是离散地变质量过程。设每抛一次所用时间间隔为 Δt ,在 Δt 内,车厢连同其内的沙子具有相同的速度 v ,因

而可以抽象成一个质量为 m 的质点。当速度 v 远远小于光速 c 时,即在经典力学中,它就是一个常质量质点;当速度 v 接近光速 c 时,即在相对论力学中,它就是一个变质量质点,这里我们所讲的自然是经典力学的情况。我们逐渐缩小每次抛沙子的时间间隔 Δt ,这样尽管车厢连同其内的沙子作为常质量质点存在的时间间隔越来越小,但并不改变其常质量质点的性质,这说明在离散变质量过程中变质量主体的力学模型始终是常质量质点。当我们将时间间隔 Δt 缩小到无限小时,上述的离散变质量过程就变成连续变质量过程了(见图 2b)。由于从离散变质量过程转变到连续变质量过程不存在一个界限,所以在连续变质量过程中,变质量主体仍保持其常质量质点的性质,只不过这个常质量质点所存在的时间间隔为无限小罢了。

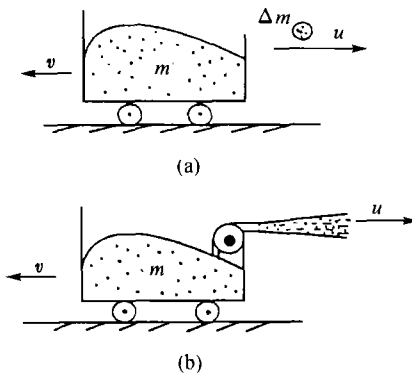


图 2

第二个例子是一根链条沿桌边下滑(如图 3 所示)。某一时刻 t 下滑段链条的长度为 AO ,我们的目的是要确定 AO 段链条作为变质量主体它的力学模型到底是变质量质点还是常质量质点。首先在 AO 两点之间任取一点 A_1 ,根据 AA_1 段链条上各点速度都相同,可以把它抽象成一个质点。由于其速度远小于光速,故它为一个常质量质点。这个常质量质点是在链条上的 A_1 点在经过桌边 O 点的 t_1 时刻

出现的,到时刻 t 为止,它存在的时间间隔为链条运动过 OA_1 距离所用的时间间隔。接下来再在 A_1 点的上方取一点 A_2 ,截取 AA_2 段链条,根据上述同样理由, AA_2 段链条也可以抽象成为一个常质量质点。这个常质量质点是在链条上的 A_2 点经过 O 点的 t_2 时刻出现的,由于 $OA_2 < OA_1$,故 AA_2 质点存在的时间间隔小于 AA_1 质点存在的时间间隔。很显然, AA_1 质点和 AA_2 质点是分别在 t_1 和 t_2 两个不同时刻所出现的两个不同的常质量质点。将两者看成是同一个质点是错误的。我们把截取点 A_i 取得越来越靠近 O 点,但不管 A_i 如何靠近 O 点,所截取的链条作为常质量质点的性质是不变的,只是存在的时间间隔越来越小。当 A_i 无限地靠近 O 点时,有

$$\lim_{A_i \rightarrow O} AA_i = AO$$

此时, (t 时刻) 所截取的即为 AO 段链条,所以 AO 段链条的力学模型为 t 时刻所出现的一个常质量质点,这个质点存在的时间间隔是无限小,可以认为它只存在于所出现的那一瞬时,我们把它称之为瞬时常质量质点。

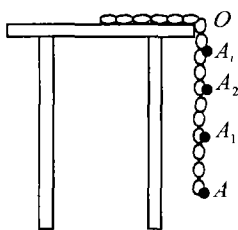


图 3

通过上述过程可以看出,在链条下落过程中,在任意时刻 t 都有一个与之相对应的常质量质点出现,而且不同的时刻对应着不同的常质量质点,于是得出如下结论:在任意时刻变质量运动主体的力学模型都是一个瞬时常质量质点,在整个运动过程中变质量主体的力学模型是由无数个瞬时常质量质点所组成的质点群。经典力学变质量运动过程的实质是:在任何一个无限小的时间间隔内都是作为常质量质点的主体质点 m 与微质量质点 dm 的合并或分离的过程,而不是一个质点的质量随时间变化的过程。

2. 质点的质量变化率和物体的质量流率是两个完全不同的概念

我们首先根据上述结论对变质量主体关于时间 t 的函数关系 $m = m(t)$ 进行重新认识。 $m(t)$ 表示 t 时刻所出现的瞬时常质量质点的质量,在这里 t 不仅仅表示时刻,还表示该时刻所出现的瞬时常质量质点的序号,即序号为 t 的瞬时常质量质点的质量为 $m(t)$ 。既然质点的质量为常量,故其质量变化率为 0。而在变质量物体基本运动方程

$$m \frac{dv}{dt} = F + (u - v) \frac{dm}{dt} \quad (1)$$

中出现的 dm/dt 项表示瞬时常质量质点群中各质点之间的质量改变率,更准确地讲是单位时间并入或分出变质量主体的质量,称为物体的质量流率,而不是一个变质量质点的质量变化率。在经典力学中组成物体质量流率 dm/dt 的微质点 dm 与主体质点 m 之间存在着相对运动,尽管 $dm \ll m$,但 dm 的运动对改变主体质点 m 的运动往往起着举足轻重的作用,故两者绝不能抽象成同一个质点,因此 dm 也就不是质点 m 的质量增量,从而质点 m 的质量变化率为 0。而在相对论力学中由速度改变而引起的微质量 dm 与运动质点 m 具有相同的速度,故两者完全应该抽象成一个质点,因而 dm 是质点 m 的质量增量,从而质点 m 的质量变化率不为 0,而是 $\frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 。这就是说只有在相对论力学中才存在

在质点的质量变化率,才存在变质量质点。所以说,物体的质量流率和一个质点的质量变化率是两个完全不同的概念。

3. 变质量物体基本运动方程与变质量质点的动量定理的比较

将(1)式右侧的 $-v dm/dt$ 项移到左侧与左侧的 mdv/dt 项结合后,将(1)式变为:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F + u \frac{dm}{dt} \quad (2)$$

并称为变质量质点的动量定理:变质量质点的动量变化率等于外力和微质点绝对运动引起反推力的矢量和。比较(1)、(2)两式,发现这里存在着概念上的混乱。先比较两等式的左侧,根据变质量质点的动量定理,(2)式左侧为变质量质点的动量变化率,众所周知,经典力学变质量运动研究的是变质量主体质点 m 和微质点 dm 组成的质点系,那么这里所说的变质量质点是指 m 还是 dm 还是两者组成的质点系? 此问题很难回答,因为 m 的动量变化率为 mdv/dt , dm 的动量变化率为 $(v-u)dm/dt$,所以(2)式左侧的 $d(mv)/dt = mdv/dt + v dm/dt$ 既不是 m 的也不是 dm 的,也不是两者组成的质点系的动量变化率。也可以说(2)式左侧的研究对象不存在。而(1)式左侧的研究对象毫无疑问是作为常质量质点的变质量主体。 mdv/dt 正是这个常质量质点的动量变化率。再来比较两等式的右侧,(1)式右侧表示主体质点所受到外界的全部作用力,其中包括微质点对它的作用力(反推力),即受力体是变质量主体质点,施力体是除主体质点以外的其他物体(包括微

质点 dm)。而(2)式右侧却说不清是谁对谁的作用力,这里的问题关键是不能确定微质点 dm 到底是受力体还是施力体,等式的两侧同时出现 dm ,等式的左侧出现 dm 说明它应该属于受力体,等式右侧出现 dm 说明它应该属于施力体。这明显是一个逻辑上的错误。另外关于反推力也有必要进一步澄清。设一火箭在太空中飞行,则(1)、(2)两式中的外力 F 为零,按照一些文献的说法, $(u - v)dm/dt$ 为 dm 相对运动引起的对 m 的反推力; udm/dt 为 dm 绝对运动引起的对 m 的反推力。反推力是被火箭喷出的气体微质点 dm 对火箭主体质点 m 的作用力,它只决定于 dm 在单位时间内向 m 所传递的动量,大量的实践已证明火箭在太空中所受的反推力是 $(u - v)dm/dt$ 而不是 udm/dt 。再说,绝对运动是指 dm 相对于定系的运动(绝对速度为 u),相对运动是指 dm 相对于动系(火箭主体)的运动(相对速度为 $u - v$),这两种运动是同时发生的,怎么去理解 dm 在同一时刻对 m 产生两种不同的作用力呢?这是不能令人接受的。

总之,变质量物体基本运动方程(1)是把变质量运动主体作为常质量质点,根据牛顿第二定律得出的,从形式和本质上都与 $ma = F$ 完全相同。它本身就是变质量主体的动量定理。它是由俄国力学家密歇尔斯基于 1897 年在其博士论文《变质量质点动力学》中提出的。尽管论文中用了“变质量质点”这个词,但其本质还是常质量质点。该论文只给出了形式为 $mdv/dt = F + \Phi$ 的方程(1)。而并未给出方程(2)。方程(2)实际上是根据数学上两个函数乘积的求导法则变换出来的,它只是数学上的一个恒等式,在物理上是没有意义的。在具体应用上常有根据方程(2)解题(把变质量主体作为变质量质点)而导致错误的例子,请看下面的例题。

4. 例题

从固定的水管沿水平方向喷出水流,流量为 $\omega = \rho Au$,式中 ρ 为密度, A 为水管截面积, u 为水流速度。水流喷射到质量为 P 的水斗上,使水斗沿光滑水平面运动(图 4 所示)。求水斗的速度为 v 时,受到水流作用力的大小。

此例是求微质量质点 dm 对变质量主体质点(水斗及其内部的水) m 的反推力 ϕ (见图 4b)。由题

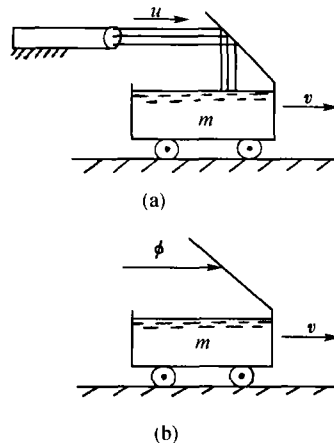


图 4

目知主体质点 m 与微质点 dm 组成的质点系不受外力,即 $F = 0$ 。先求质量流率,当水斗运动速度为 v 时,水流流进水斗的质量流率为:

$$\frac{dm}{dt} = \rho A(u - v) = \frac{\omega}{u}(u - v)$$

根据(1)式,得反推力 $\phi = (u - v)dm/dt = \omega(u - v)^2/u$,而若根据(2)式则得反推力 $\phi = udm/dt = u\omega(u - v)/u = \omega(u - v)$ 。显然,前者是正确的,后者是错误的。这正说明现有的变质量质点的动量定理(方程 2)所造成的错误影响是不容忽视的,应予纠正。

对变质量物体力学模型的研究可知,在经典力学中变质量主体的力学模型不是变质量质点,而是瞬时常质量质点,正如有的文献所指出的:“在牛顿力学中一个质点的质量本来就是不变的。如果一物体各部分之间发生分离(如火箭与它喷出的气体),我们可把它们分割成多个物体(质点)来处理。但在相对论中,质点的质量 m 与速度 v 有关,这时 m 不能看成是不变的。”这就是说经典力学中根本不存在变质量质点,只有在相对论中才存在变质量质点,因而经典力学中本来也就不存在变质量质点的动力学普遍定理(动量定理、动量矩定理、动能定理)。在中学、大学物理教科书中讲述牛顿第二定律时应明确指出:运动速率远远小于光速的质点就是常质量质点,经典力学中有质量并入或分出的物体不是变质量质点,而是瞬时常质量质点。完全可以用形式为 $ma = F$ 的牛顿第二定律去求解像火箭、落链一类的经典力学的变质量问题。