用无量纲量表示生物体的极限

李　莉
(兰州大学物理科学技术学院　甘肃　730000)

现今世界的一切生物都是进化而来,生物进化有自己的法则,但是它不能超越物理学规律。一头奶牛不能以逃逸速度往上跳,生物酶既不能起麦克斯韦妖的作用,也不能使鸟避开重力。物理学对生物体的限制不少于它对人类自身技术的约束。但是,要在实践中判明这些限制并非易事。一种工程师们采用的方法,即考虑两种对抗因素的相互作用所确立的范围和它们的比值(常常是无量纲的量),至少对了解它的宏观力学方面的特征是有益的,起码给我们以启示。

设想一个简单的堆叠高度的例子,堆底的应力与材料的抗压强度的比值不能超过1,即

$$\rho gh/\sigma_{cm}<1.$$

式中ρ为材料的密度,g为重力加速度,h为堆叠高度,σ_{cm}为材料的极限压缩应力或压缩强度。将相关参数代入上式不难得出:普通砖块的堆叠高度不到400m就会出问题,花岗岩可以叠高到将近5000m,骨头和木材甚至能超过8000m。同样的方法用于拉伸负荷,可得出一根悬垂的缆绳因自重而断裂的极限长度。结果表明,从地球的同步卫星悬挂一根钢丝绳至地面是不可能的。

无量纲量通常是它们的最初问题、量纲分析的衍生物。现今已定义和命名了许多的无量纲量,其中大多数是由两个力的比值(例如黏滞力和重力的比值)构成。他们对实际问题不做严密的分析,只做大致的估算,即对复杂的物理现象进行简明的定量的考虑。有着极其复杂现象的生物学恰恰需要这种比较粗略的分析方法。

不仅如此,无量纲量对生物学家还有着特别的吸引力,因为它往往能避开生物体的尺寸对问题分析的干扰,这些问题所涉及的生物体的长度可能横跨8个数量级。例如,在讨论细胞大小、游动速率和新陈代谢率时,表面积与体积的比值是一个重要的参量,这一比值反映了它们的大小和形状。若生物体的某一特性(如蜉蝣生物的沉降速率)随表面积与体积的比值变化,那么物体的形状或是大小的改变都可以是引发的原因。若采用一个无量纲量,比如表面积的立方与体积平方的比值,则仅仅取决于它的形状而与大小无关。当这一比值变化时,与物体形状有关的现象将随之改变,而单纯依赖大小的现象将保持不变。

游动、气体排出、步态变化

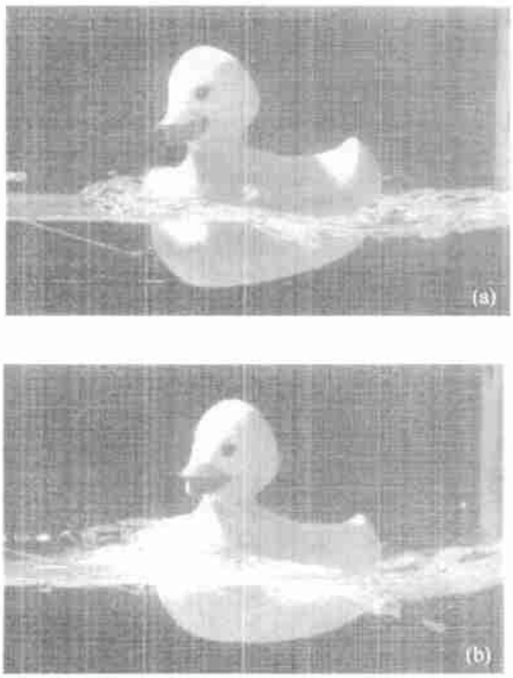
W. Froude (1810—1879)首先设计了一种有用的方法,由一个缓慢运行的小船模型来推断以给定速率航行的大船的特性数据。现在,我们用以他的名字命名的一个比例参数——Fr数,是个无量纲量,最大限度地确保模型和大船之间的相似性。得到Fr数的一种方法是取使水维持波动的惯性力与使水面趋于平坦的重力之比,则有

$$Fr=v^2/gl,$$

式中v为水面的波速,l为相邻波峰之间的距离(有时用上式的平方根作为Fr数)。波以特定的Fr数运动,于是波长较长的波比波长较短的波运行得快。

一艘具有普通排水量的船体在水面上运动时会产生波,船头产生一个弓型的船首波,沿船侧长度方向在船尾产生一个船尾波。当船全速(船体速率)行进时,船首波和船尾波被船身的长度所分离。只要船不超过此速率,情况就是如此。若船速超过大约临界Fr数的16%时,船就会脱离它的船尾波,并试图穿越或攀上它的船首波,这就使得超速行驶变得极其艰难。图1显示一只在水中被牵引的橡皮鸭子,当速率刚刚低于(a)和刚刚高于(b)它的躯体速率时的情形。注意,它在高速时身体向上倾斜而且它的尾波消失。这里的关键是"长即快"的规律,这个规律告诉我们,在船达到功率陡增点之前,越是长的船行驶得越快。一艘100m长的船可达到的船体速率约为13m/s,而10m长的船仅为4m/s。这就是为什么连动物都发现,在水面上游动比完全潜入水

中游动费力得多。长度约为 1/3m 的鸭子的躯体速率为0.7m/s, 而完全潜入水中游动时, 它的速率可以高出几倍。有人发现, 在水面上高于躯体速率牵引水貂遇到的阻力是在水下牵引的10倍。计算表明, 由于大多数动物的身体不是很长, 致使它们在水面上适宜的游动速率都超出了 Fr 数的临界值, 所以有许多用肺呼吸的动物, 它们在游泳时大部分时间是在水下潜泳。一种特别让人喜爱的动物——海豚在游动时, 时而钻入水中, 时而跃出水面。只有大鲸鱼可以像一条船那样在水面上洄游。自然界中通气潜泳是很罕见的, 可能是由于维持低阻力游动所需的深度致使他们呼吸时要抵抗很大的压力。这或许就是长颈恐龙不能潜泳的原因。



(a) 速率刚刚低于鸭子的躯体速率;

(b) 速率刚刚高于鸭子的躯体速率

图 1　橡皮鸭子在水面上以不同速率游动时的情形

水压力的存在引出了另一个限制, 对此 Fr 数提供了解释。考察一个附着在流水下面岩石上的小虫, 它设法抓住一个气泡。依据伯努利原理, 流体的速率和静压力成反比, 因而水的流动使气泡中的压强降低。如果有足够的空气溶入水中, 那么氧和氮就会进入气泡中, 气泡就可能起到一个“持久的肺”的作用。激流的溪水与上部的大气通常处于平衡态, 但是水中气泡内的压强不一定低于大气压, 因为气泡周围的压强随深度增加。由伯努利原理可知, 气泡中压强的下降取决于水流速率的平方。气泡要成为一个“持久的肺”, 就必需使流动引起的压强的下降值与深度导致的压强增加值之比(又是惯性力与重力的比值)大于1, 即

$$\rho v^2 C_p/2\rho gh > 1.$$

式中 h 为水深, C_p 是由经验确定的压强系数。对较小的气泡, C_p 约为0.2, 于是相应的 Fr 数 v^2/gh 约等于10。显然, 作为“持久的肺”的气泡的临界深度为 $v^2/10g$, 这是一个很严格的约束条件。对于1m/s的水流, 临界深度只有1cm。若要使1m深处的气泡能成为“持久的肺”, 就需要有10m/s的流速, 这样高的速率只在瀑布和大的碎浪中才有。至少有几种生物利用了这种方式, 例如一种西非的甲虫常常潜入浅的溪流之中, 并且轻触岩石上的藻类; 一些小虫的蛹(图2)会附着在激流下的岩石上。我们对这种稀有的现象不再感到惊奇。

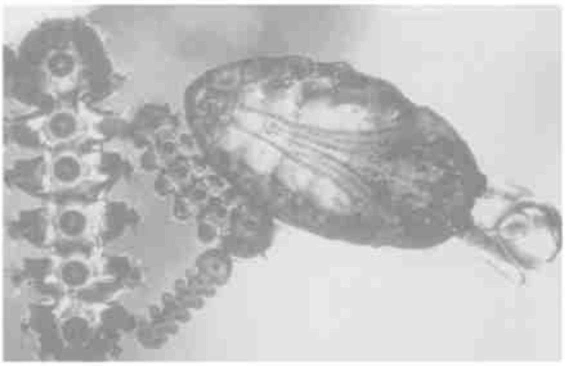


图 2　溪水中的小虫蛹(它的两个呼吸器之间吸附了一个气泡)

有人提出 Fr 数更普遍地与日常生活关系密切的应用。他注意到动物行走的步态, 发现它们利用钟摆的方式贮存重力能以减少重复加速腿时所做的功。若 Fr 数定义式中的长度视为臀部至地面的距离, 则所有的动物, 无论大小都在确定的 Fr 数下以动力学相似的方式行走。为贮存能量, 它们在快速行走时, 宁愿加大步幅而不愿加快频率。动力学相似性意味着它们大约在相同的 Fr 数(约为0.5—0.6)下达到实际幅度的最大值。在这个 Fr 数下, 小自昆虫大到哺乳动物都选择小跑等步态, 用弹性能(主要在肌腱中)的贮存代替重力能的贮存。当然, 这一转变点与动物的大小有关, 对一个成年人, 步态的转变大致发生在速率为2.2m/s左右。他还注意到4条腿的动物由小跑到疾驰的转变发生在 Fr 数约为2~4之间, 考虑到所涉及动物的尺寸范围之大, 这仍是一个相当准确的转变点。这是一个谜, 因

为这两种步态都没有包含重力能的贮存。对这一问题的解释不能从小跑的上速度极限而要从疾驶的下速度极限得出, 因为动物在每一个跨步的时间内是自由下落的, 它应当允许腿的某一确定部分下落, 所以有理由认为重力在起作用。如果下落的这段时间是跨步持续时间的一部分, 而且在转变点的奔跑速率随腿长与跨步频率的乘积而变化(这被观察所证实), 那么 *Fr* 数应该能够确立转变点。

水上行走, 树液上树

对我们来说, 水的表面张力是有些麻烦的事, 通常用一些清洁剂来减小它。对某些生物, 特别是比我们小的一些动物, 表面张力可能成为它们物理世界中的重要角色。极少的动物能在水上行走, 它们将腿压入水面, 利用弯曲液面表面张力向上的分力来支撑身体。这些动物主要是昆虫和蜘蛛, 它们的体长范围很小, 约从 1mm 到 2cm。有一对无量纲量能够反映这一现象的特征。

在确定能在水上行走的生物体尺寸的上限时, 应当考虑作为对抗因素的向上的表面张力和向下的重力, 要使动物不落入水中, 重力和表面张力的比值, 一个无量纲量——*Bo* 数, 应小于 1, 即

$$Bo = mg/\gamma l < 1。$$

式中 γ 是表面张力系数, l 是浸湿的周长, 也就是空气–水–脚分界面的长度(图 3)。假如一个穿着 9 号码凉鞋的人立在未被污染的水面, 得到的支撑力不超过 10g, 如果要在水上行走, 只有 5g, 因为是单腿支撑。但是一个重量仅为 1/10g 的昆虫则不需要奇异的形状, 仅要 1.3mm 的浸湿就足够了。如果它们要从水面垂直向上跳起, 则需要 10 倍于体重的支撑力。若不考虑生物体的形状, 并用密度乘以长度的立方代表生物体的质量, 则 *Bo* 数将随长度的平方变化, 于是较大的生物体难以在水面上立足。

但是, 在确定能在水上行走的生物体尺寸的下限时, 重要的问题已不再是支撑力而是移动力。水的表面张力将阻碍它们试图向任一方向的移动, 必需用足够大的惯性力来抵抗表面张力。换句话说, 需要足够大的惯性力与表面张力的比值才不至于让水面成为丧命的陷阱。这个比值由另一个无量纲量——*We* 数给出, 即

$$We = \rho l v^2/\gamma。$$

这意味着水上行走的生物体的尺寸不能太小, 速率不能太慢。由于大小和速率常常是正相关, 这对于特别小的动物成为真正的麻烦。正如一位既是生物学家又是散文家所写:“一个水甲虫发现, 池水的表面关系着它的生与死, 水面既是使它陷入危险的境地又是它不可或缺的支撑。”

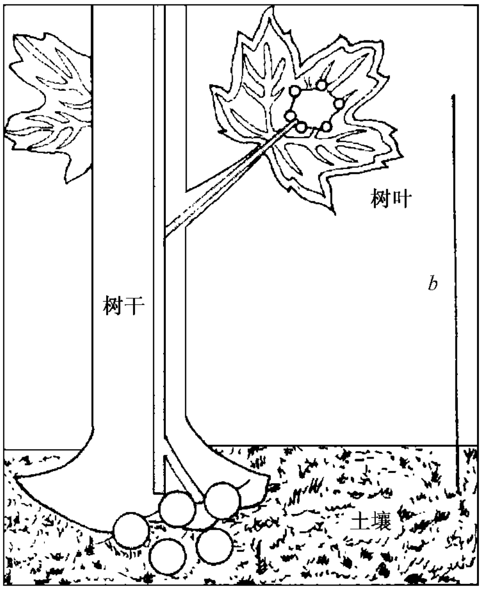


图3　水上行走的昆虫受力示意图

重力和表面张力的相互作用在完全不同的生物领域里都是很重要的。我们知道, 即使在最高的树内树液流动的管道从根部一直延伸到叶片, 其间未被气体阻断。毛细作用能解释树液的上升吗? 假设树的导管壁完全润湿, 弯曲液面产生的向上的附加压强等于两倍的表面张力系数除以导管的半径, 于是 *Bo* 数为

$$Bo = \rho g h r/2\gamma。$$

典型的导管半径约为 1/20mm, 欲使 *Bo* 数不大于 1, 树液上升高度 h 还不到 3m。而实际的树高远远超过了这一数值, 所以单靠毛细作用是不行的。现在一般人所接受的解释是, 树液柱靠巨大的水的内聚力所维持, 从根部直到顶端, 并通过从叶面蒸发水分

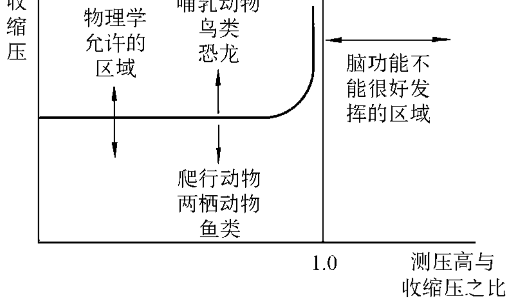


图4　大树从土壤中吸收的水分沿着导管上升直至叶面

被向上提起,如图4所示。将内聚力搁置一边,我们可以问树液柱何以能在树的顶部对大气敞开?换句话说,既然水蒸气可以离开树叶,为什么空气却不能进入树叶?这里关键的问题是相关的半径极小,叶片内部细胞壁上气孔的半径约是10μm。对于这样小的半径,*Bo*数不可能大于1,因而空气不能靠重力进入到树叶中去,除非树的高度超过1500m。但是至今还没有这样高的树。从这个意义上说,树在高度上不受限制。

循环的两个问题

在讨论液体在生物体内循环的问题时,没有什么会比物理学对其结构的约束更加强烈。在这里,表面张力对动物所起的作用比起上面提到的植物小很多。但是重力对陆地上的大动物如同对一棵树一样重要。植物大多利用它们的导管系统借助负压向上吸取液体,然而对动物即使是长颈鹿和那些很像恐龙的动物,虹吸作用都已被排除。由于没有辅助的泵浦方式,因而需要心脏。它能产生足够的压力使血液上升到大脑并进入动脉和毛细血管。

通常所说的血压是血液压强与大气压之差,心脏收缩压是指左心室输出的峰值。这里有一个粗略的估算方法:将心脏收缩压作为有效供给脑部血液的压强差,单位取mmHg(毫米汞高);尽管心脏不在脚部,仍将身高视为血液上升的高度,身高也以血压单位表示,称为'测压高'(等于血液密度、重力加速度和高度的乘积)。例如,1.7m的身高相应的测压高为125mmHg。如果一个动物的高度超过它的心脏收缩压,那么忧虑随至。可以定义一个称之为'循环障碍数'的无量纲量,等于测压高与收缩压的比值,它必须小于1。

大多数的哺乳动物有非常相近的血压。如人类的静收缩压大约为120mmHg,猫和狗的与人大致相同。但是,那些形体比人高大的动物就必须有较高的收缩压。比如马的静收缩压约为180mmHg,长颈鹿则要300mmHg。图5给出了心脏收缩压与测压高和收缩压的比值之间的关系曲线。人的情况接近曲线的转折点,从这里曲线开始向上倾斜,以保持'循环障碍数'小于1。如果一个人水平躺着,忽然站起来感到有点头晕,这表明他不是高血压。猫没有这样的问题。

对于水生动物,由于它们生活在接近血液密度的水中,因而高度和姿态都无关紧要。鲸鱼尽管体形庞大,却有一般哺乳动物的血压。水蛇有通常爬行动物的血压(约为40mmHg),陆地上的蛇趴在地面上时也是如此。为什么它能爬树而又不超出这一血压呢?爬树的蛇保持循环障碍系数是通过一个极好的调整,它们的心脏明显地靠近身体的前端。我们对长颈恐龙特别感到惊奇,它们必须有像鸟和人一样完全分离的血液循环和肺循环系统,还得有长颈鹿那样高的血压。这些都再次表明,生物进化受到物理学规律的约束。

生理学教科书常常以伯努利原理作为循环系统章节的开始。但只有少数教科书时时提到它,或许这是一件好事。考虑一个流体脉冲通过可形变的管子的情形:由伯努利原理得知,流动快的流体压强低,所以当流体速率上升时,管子必然会收缩。另一个规律是H-P方程,该方程描述了使管中流体作层流所需的压强差,其结果是流速越高压强差越大。对于一个给定的流动,究竟是伯努利原理还是H-P方程起主要作用,只需看它们的比值(前者用动力压$\rho v^2/2$表示),即

$$\frac{B}{HP} = \frac{\rho v r^2}{16\mu l} \propto \frac{\rho v d}{\mu}。$$

式中μ和ρ分别表示血液的动力学黏度和密度。对一个直径1mm、长100mm、流速100mm/s的血管,这一比值约为0.01,这表明H-P方程起主要作用,伯努利原理可以不必考虑。实际上,由于循环系统的结构非常复杂,实际的长度会更长,伯努利原理仅在心脏瓣膜附近等少数几个地方有用武之地。我们感觉到脉搏的跳动不是在动脉收缩而是在动脉扩张的时候就说明了这一点。顺便指出,上述方程中的关系式就是雷诺数的形式,即惯性力与黏滞力的比值,它是流体力学所有无量纲量中最有名的一个。

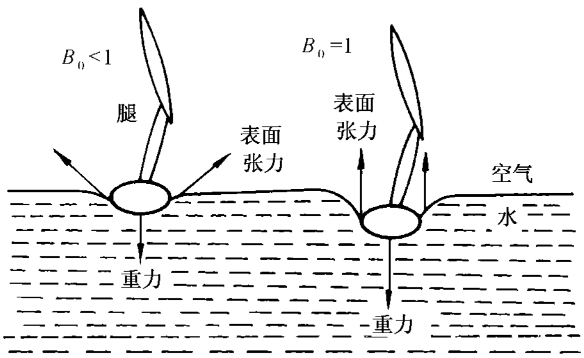


图5 心脏收缩压与动物高度的关系

喷射、推进器和翅膀

效率是一个无量纲量,通常以100%为理想极

限。生物体中湿的蛋白质适宜的温度是 0℃—40℃, 在这一温度范围内工作的热机效率低于13%, 所以自然界没有天然的热机应是不足为奇的。考虑一种装置, 如推进器, 它通过将穿过它的流体加速来获得推力。用 v_1 表示流体进入推进器的速率, v_2 表示推进器的输出速率, m_0 表示单位时间通过的质量, 则推动力为 $F = m_0(v_2 - v_1)$。输出功率为 $P_{出} = Fv_1$, 输入功率为 $P_{入} = m_0(v_2^2 - v_1^2)/2$, 于是推进器的效率(通常称为 Froude 推进效率)为

$$\eta = 2v_1/(v_2 + v_1)$$

这一关系式给出了一种限制, 因为要产生推动力, v_2 必须大于 v_1, 因此效率不可能达到 100%。若使 v_2 接近 v_1, 为获得足够的推动力需要有最大可能的体积流量和最小的速率增量。这对有桨叶或螺旋桨的喷射机是不适合的, 喷射机通常要求较小的体积流量和较大的速率增量。

但是自然界造就了一些喷射装置, 像水母、蛙鱼、鱿鱼、扇贝等, 它们能够比较容易达到这样的要求。它们用肌肉包裹软管, 用活门来控制流体做单向流动, 并通过自身排水来过滤食物并获得氧气。除鱿鱼外, 水中体形大、游速快的动物, 像鱼、企鹅、海豹、鲸鱼等都使用某种形式的推进器。这些推进器除了不是旋转式而是摆动式之外, 都和我们制造的推进器一样。究竟是用鱼鳍推进还是采用喷射方式, 倘若这两者之间的竞争取决于 Froude 推进效率时, 喷射会失败。鱿鱼作为长足的水栖动物喷射时的速率达到 8m/s, 实在令人惊叹, 但是这仅仅发生在它逃避捕食者或追捕猎物的时候, 此时效率如何已无关紧要。一般情况它们仍用鳍做定长的游动。我们对喷射机也有类似两可的态度, 不把它们用在小汽车或摩托车的商业生产上, 而仅在少数快艇上采用。使用它是为了满足高速的需求, 要产生巨大的推力, 喷射机的输出速率必须大到足以超过快艇。一个例外就是 Harrier 喷气式飞机, 一种小型军用飞机, 它可以垂直起飞, 还可以停在空中, 但是它的油耗极大。

Froude 推进效率还显示了另一个限制, 这多半与人类的技术有关。最早制成的飞机(不算比空气轻的飞行器)和现在大多数飞机一样, 都是从固定的机翼得到升力, 从螺旋桨或喷射机得到向前的动力。自然界会飞的动物, 如鸟、蝙蝠等几乎都没有这样的组合。他们把单一的推进器指向适宜的方向, 使之同时得到升力和向前的动力。它们用胸部肌肉和一对单向活门操纵脉动式的喷射机制, 在提供动力的同时进行呼吸。实际上鸟类利用它们的肺单向地泵浦空气。采用固定机翼的功效取决于飞行器的大小, 机翼的升力随它的面积变化, 而重量随体积变化。这就意味着越大的飞机相对的升力越小, 除非机翼不成比例地增大或飞机飞得更快。动物的飞行速度都很低, 他们可以不用翅膀与推进器的分离就能达到很高的推进效率。一只鸟能以 30m/s 的速率水平飞行是很惊人的, 即使飞得最快的游隼, 它向下俯冲的速率也只是刚刚超过 60m/s, 这样的速率对飞机来说还是太慢了。自然界中体形小的飞行动物大多有相对大的翅膀, 因而允许较低的飞行速率。非常小的鸟(如蜂鸟)能稳定地停在空中, 中等大小的鸟只能短暂地停在空中, 而大鸟根本不可能停在空中。要使飞机也能停在空中需要等待功率与重量的比值极高的引擎出现, 低功率的以人力做动力的飞行器则需要有巨大的翅膀。

无量纲量还可用在其他许多生物学领域。它们中有一些是物理学早已确立了的, 具有完全相同的形式, 另一些为生物学的应用重新定义了变量, 还有一些是特别为生物学所创立。这些无量纲量有的给出了可行的范围, 有的提出了定标的规则, 有的解答了具体的问题, 有的引导我们思考的方向。尽管大多数无量纲量都涉及更复杂的问题, 但是本文提到的无量纲量已使我们对它们在生物学中的应用有了粗浅的了解。

(编译自美《今日物理》1998 年 11 月刊沃格尔的文章)