

从万花筒到组合镜面的成像规律

杨旻 张乐 张发 王 毅

(兰州西北师范大学附中 甘肃 730070)

万花筒,是许多人都曾经玩过的玩具,那其中复杂却又充满规律性的图影曾让我们浮想联翩。其中有哪些规律呢?这似乎是一个非常有趣的问题。

1. 单一镜面的成像

万花筒实际是由几个平面镜组合而成的,为了便于研究,我们不妨先来看看单个平面镜的成像规律。平面镜成像系统的物光空间与像光空间是重合在镜的一侧的(这里我们暂时只考虑实物的情形)。为了描述方便,我们不妨将这一侧称为物空间,另一侧称为像空间,且认为虚像就处于像空间中。这样一来,由光的折射定律,我们不难得到这样两个规律:

- ①物与像关于平面镜成手性对称;
- ②我们只可以在平面镜所限定的目域中观察到像。

2. 两组合平面镜系统的成像

单个平面镜的成像很简单,但当两个平面镜组合在一起时,问题就复杂多了。为了使我们的讨论具有一般性,我们要看看两镜面成某一角度的情形,如图 1 所示。这时有别于单个平面镜的是,物空间只有一个,但像空间却有很多。

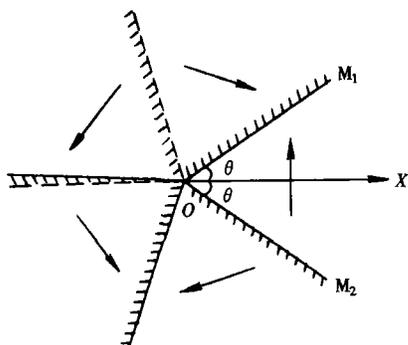


图 1

具体来看一看,当两个平面镜 M_1 与 M_2 成 2θ 角时,考虑到对称性,我们以其交点 O 为极点,以其角平分线为极轴,建立极坐标系。这样, M_1 所在的

位置就是 θ ,而 M_2 所在的位置就是 $-\theta$ 。它们经过互相成像,产生了若干“像镜”,位置为 $\pm(2n+1)\theta$ ($n \in N$),其中每一个像镜都有自己的物空间与像空间,而一个像镜的像空间又是下一个像镜的物空间。我们同时注意到,因为每一种对称都是手性的,所以我们必须为空间规定一个方向,以箭头表示方向,情况就如图 1 所示。这种对称性和周期性,使我们联想到了弦函数图像的性质,这就使我们有可能借助这一数学模型来刻画其中的性质。

以极角 x 为 X 轴坐标,逆时针为正方向,这样,一个正弦函数 $y = \sin(\pi x/2\theta)$ 的图像就可以表示各个像空间的性质了(如图 2)。其中每一个单调区间就表示一个独立的空间, $x = \pm(2n+1)\theta$ ($n \in N$) 表示镜或像镜, $x \in (-\theta, \theta)$ 的区间就是最初的物空间,而单调性相同的单调区间则代表了相同方向的空间。

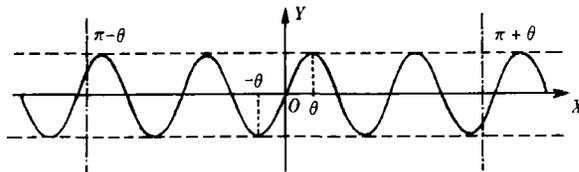


图 2

由以上的讨论可以看到,函数 $y = \sin(\pi x/2\theta)$ 似乎可以很好地描述两相交镜组的成像情况。但在上边的讨论中,我们没有讨论视界的约束,实际上,我们的视界是受到两镜面的限制的,假定两镜面相交于一条线上,而其他方向则无限大,则我们通过在物空间中移动眼睛,所能达到的最大视界为 $(-\pi - \theta, \pi + \theta)$,其中从 $M_1(\theta)$ 观察可达到 $(\theta, \pi + \theta)$ 的范围,从 $M_2(-\theta)$ 观察可达到 $(-\pi - \theta, -\theta)$ 的范围。于是我们所能观察到的实际上是图 2 中两虚线之间的部分。

这里我们不妨注意一下虚线两侧的部分,转动两平面镜以调整其间的夹角 θ 时,我们会看到,在

我们的视界外,似乎还有无限多的空间,在 θ 减小时,它们不断地,越来越快地闯进我们的视界,让我们看到;在 θ 不断增大时,它们又越来越慢地离开我们的视界。这使我们不由联想到复平面和实平面的关系。例如图 3,对于曲线 $y^2 = x$,在实平面上,它的图像是以 X 轴为对称轴,顶点在原点上的,开口向右的抛物线 X 轴以上的部分;而在虚平面上,它

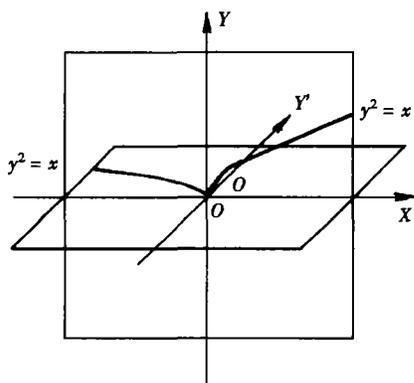


图 3

的图像是以 X 轴为对称轴,顶点在原点,开口向左的抛物线 X 轴以上的部分(图中复平面不是 3 维空间中的平面)。视界外的空间不是真实存在的,那么我们能不能把视界外的图像放在复平面中呢?对函数的表达式作这样的变形,令

$$f(x) = y = \sin\left(\frac{\pi}{2\theta}x\right) \left[\frac{g(x)}{|g(x)|} \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中, $g(x) = (\theta + \pi)^2 - x^2$,这样一来,我们的函数图像就如图 4 所示。显然,我们只能看到实平面中的空间,而随着 θ 的改变,图像在实平面与复平面中的分布也在随之变化。

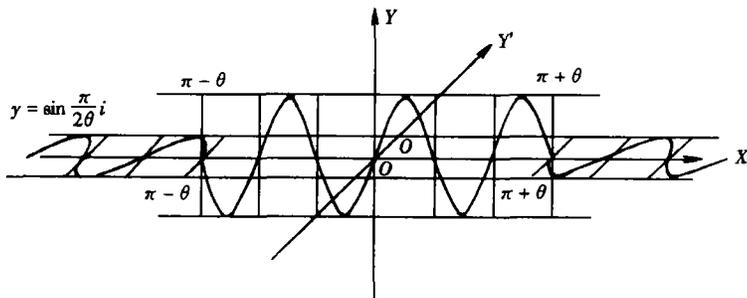


图 4

这里,我们不妨看一看如果在 $x \in (-\theta, \theta)$ 中有一个物像点 $p(\varphi)$,那么它的像会有哪些,各在哪里。显然,在函数图像中,各个像点所对应的 y 的取值都与物点的相同,为 $\sin(\pi\varphi/2\theta)$ 。

那么,对于各像点 x 的取值,我们就可以通过解方程 $y = \sin(\pi\varphi/2\theta)$ 而得到。它们分别是:物点 $p(\varphi)$;从 M_1 观察到的 $(2\theta - \varphi), (4\theta + \varphi), (6\theta - \varphi), (8\theta + \varphi) \dots [2n\theta + (-1)^n\varphi]$;从 M_2 观察到的 $-(2\theta + \varphi), -(4\theta - \varphi), -(6\theta + \varphi), -(8\theta - \varphi) \dots -[2n\theta + (-1)^{n+1}\varphi]$ 。以上的 $n \in \mathbb{N}$,也可以合并得到通式 $[2n\theta + (-1)^n\varphi]$ ($n \in \mathbb{Z}$),其中 $|2n\theta + (-1)^n\varphi| \leq (\theta + \pi)$ 。易知,物像点 $p(\varphi)$ 也符合该式。

那么,方程的解的个数,也就是像的个数与 θ 和 φ 的大小有什么关系?通过分析,我们得到了以下结论:

① $\pi - m\theta > 0$ 时

若 $|\varphi| \leq \pi - m\theta$,则有像 $m + 1$ 个;

若 $|\varphi| > \pi - m\theta$,则有像 m 个;

② $m\theta - \pi > 0$ 时

若 $|\varphi| \geq m\theta - \pi$,则有像 m 个;

若 $|\varphi| < m\theta - \pi$,则有像 $m - 1$ 个;

③ $m\theta = \pi$ 时,则有像 m 个;

④ $(m + 1)\theta = \pi$ 时,则有像 $m + 1$ 个(其中有两个像是重合的)。

测量不同条件下成像个数的实验记录

2θ	$ \varphi $	像数(个)
36°	—	10
70°	$> 5^\circ$	5
	$\geq 5^\circ$	6
130°	$< 15^\circ$	2
	$\geq 15^\circ$	3
120°	—	3

可以看到,其中除情形③④外,其余的像的个数与原物的位置都是有关的。为了检验上述结论,我们选取了几个特殊的情况,用实验进行了证明,结果如上表所示。

3. 多镜面组合系统成像的简单讨论

现在再回来看万花筒,最简单的万花筒如图 5 所示,是由 3 个等宽的平面镜拼成的。观察它的一个顶角,我们会发现,原来它就是前边研究过的模型。其中 M_1 与 M_2 的夹角 $2\theta = \pi/3$,对于镜面间的任意一个物体,我们都可以看到包括它在内的 6 个像。这里两镜面之间的空间不再是无限的了,在另一边 M_3 限制了它,但同时, M_3 也会在 M_1 和 M_2 上成 6 个像。相似的情形会出现在另两个顶点,于是就会在

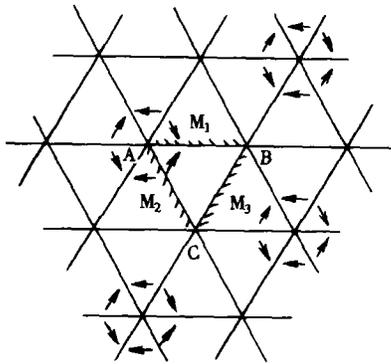


图 5

原有的空间 ABC 周围出现一圈次级的像空间,而其中的每一个像空间又可以成为新的物空间继续成像。于是原来有限的空间就经过这样的“复制”、“生长”而充满了整个视野。

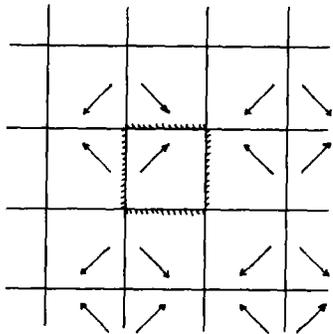


图 6

当然,上面讨论的是最简单的情形,实际上,镜面的个数不一定是 3 个,而围成的图形也不一定是等边凸多边形,于是,问题就变得复杂而丰富了。简单看一下,就正凸 n 边形而言,它的单个内角的大小为 $(n-2)\pi/n$,显然,它的大小的正整数倍不一定是 2π ,也就不一定出现像的个数与物的位置无关的特殊情况,但通过计算,我们可以知道,除了正三角形(正三角形)外,还有正四边形(如图 6,各个像和像空间实际是同向重合的)和正六边形(此时已出现了影像和像空间的非同向重叠)具有类似的特殊性质。而对于较一般的情形,讨论就比较复杂了,但我们相信,其中也是具有规律性的。

封底照片说明

美国 B-2A 型隐身轰炸机机身长 21.03 米,高 5.18 米,翼展 52.43 米,最大载弹量 22680 千克,作战航程 1.2 万千米,通过空中加油可以达到 1.8 万千米。B-2A 型隐身轰炸机的隐身性能非常出色,其雷达反射截面不到 0.1 平方米,仅相当于一只飞鸟

的雷达反射截面。它的整体外型光滑无褶皱,驾驶舱设计成圆弧状,不容易反射雷达波。在机舱玻璃中掺有金属粉末,使雷达波无法穿透舱体。机翼后掠使得从上下方向入射的雷达波无法反射或折射回雷达所在方向。在机翼还设计有不规则蜂巢式空穴,用于吸收雷达波,后部设计成 W 形状,使来自飞机后方的雷达波无法反射回去。无垂直尾翼的设计,减少了机体的雷达反射截面。武器挂架、发动机舱、起落架全部埋藏在平滑的机翼内,避免了雷达波的反射。设计上,还把发动机的进气口安置在机翼上方并呈 S 状,使人射来的雷达波经过多次折射后衰减、变弱。在发动机内部还装有气流混合器,将流经机翼表面的冷空气导入发动机内,用来降低发动机的温度。特别是飞机采用了喷口温度调节技术,使得红外暴露信号大为降低。在飞机的制造材料上,使用不易反射雷达波的碳纤维和石墨等复合材料。此外,飞机还使用了特制的吸波材料与吸波油漆。

B-2 型隐身轰炸机集各种高科技于一身,被誉为本世纪军事航空史上的里程碑。但是每架 B-2 飞机价格高达 22 亿美元,还有它复杂的维护保养(每飞行小时的维护时间为 132 小时),都成为大批量生产的主要问题。
(李之)

科苑快讯

银河系内发现快速飞行的黑洞

宇宙爆炸产生的一个黑洞目前正在以比其周围的星球高出 4 倍的速度穿过银河系;上述黑洞至少距离地球 6000 光年,目前大致方向是朝着地球飞来,但近期不会对地球构成威胁。这一发现证明了黑洞的确是超新星爆发的后代。负责这项研究的法国原子能委员会研究人员弗利克斯一米拉贝尔表示:“这是我们发现的第一个在银河系内部快速飞行的黑洞。”能够发现上述黑洞是因为它正从身边一颗可见的星球中“吸取养料”,这颗可见星球每 2.6 天绕黑洞飞行 1 周。

这次发现的不是形成于大型星系中间的那种规模较大的黑洞,而是大多在大型星球爆炸时产生的恒星黑洞。天文学家指出,在银河系的中央区域,星球的形成更加频繁,因此超新星的出现也更加常见。这次发现的黑洞已被命名为“GRO J1655-40”,天文学家预计会在银河系发现更多的黑洞,他们希望能够对黑洞的形成做更深入的研究。