

量子引力之探索

马永革

(北京师范大学物理与天文学院 100875)

20世纪初,广义相对论的创立使人类对自然的认识达到了前所未有的高度,而它与同时代另一个革命性的物理学理论——量子力学的矛盾性也日益突出。量子引力的探索正是要协调这两个基本理论之间的矛盾,为物理学大厦建立自治且牢固的理论基础,是物理学基础理论研究的重中之重。从高维时空中弦的振动到时空的原子,人类理智为揭开量子引力的神秘面纱正展现出非凡的智慧和勇气。

一、当代物理学基础的矛盾性

1. 广义相对论是人类智慧的综合

当今人类社会所取得的一切科技成就,从手机、电脑到核电、卫星,无不建立在物理学精确规律的基础之上。牛顿于1687年完成的著作《自然哲学的数学原理》成功地综合并发展了伽利略和开普勒等人的成果,首次提出了普遍适用于天上的天体和地上的万物的精确的数学规律^[1]。从此,现代物理学开始在人类历史上粉墨登场。经过两百多年的发展,牛顿力学体系已相当完善并成为自然科学理论的典范。然而,20世纪伊始,爱因斯坦敏锐地意识到牛顿力学中的伽利略相对性原理与电动力学的矛盾性,他于1905年发表的论文《论动体的电动力学》颠覆了牛顿的时空观^[2],首次将时间和空间理解为一个第一性的概念——“时空”相对于观察者的表现,成功地协调了牛顿力学和电动力学的基本观念,建立起具有庞加莱对称性的时空结构。紧接着,爱因斯坦直面狭义相对论与牛顿万有引力理论的矛盾性,基于引力的普适性,将所谓的万有引力理解为时空几何的弯曲效应,以1915年爱因斯坦方

程的提出为标志^[3],创立了彻底改变人类对时空和物理学认识的广义相对论。从牛顿力学到广义相对论的发展历程不难看出,物理学的每一次进步都是一次人类智慧的综合。

2. 神奇的量子物理学

如果说广义相对论的诞生有着清晰的逻辑思维线条,20世纪的另一个革命性的基本物理理论——量子力学的创立则更多地依赖于对与微观世界相关的实验分析。当物理学家试图用经典物理学去理解与电磁场辐射和吸收相关的现象时发现,微观的能量具有奇怪的分立性^[4],1905年爱因斯坦借助普朗克公式明确提出了光子的概念^[5];玻尔进一步将分立能量的设想推广到原子中的电子,很好地理解了原子的稳定性和光谱特性^[6]。不仅如此,微观领域的实验显示,微观粒子仅在与其他物体相互作用时才显现得像一个粒子,而在自由状态中更像是一个波。海森堡和薛定谔以各自不同的方式找到了这种波粒二相体在牛顿时空背景中的不同表象下的演化方程,以此为基础,狄拉克给出了量子力学的完整理论形式与框架^[7]。量子力学的物理可观测量是量子态空间上的算符,理论计算只能给出一个物理量在测量时可以取各个可能值(算符的谱)的概率而不是某个确定的值。粒子和场的概念能够很好地融合在量子理论中,基本粒子都可以看作场的量子化。将狭义相对论的时空结构与量子力学相融合,作为粒子物理学基础的量子场论被成功地建立起来,电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用都可以在量子场论中得到很好的描述^[8]。

3. 物理学理论基础中的问题和矛盾

广义相对论使得我们对引力和时空的认识发生了革命性的改变,其理论预言被越来越多的实验观测所证实,已成为现代天体物理和宇宙学的理论基础。但它仍是一个经典的理论,时空几何是一个可以弯曲的连续体,对物理量测量值的预言是确定性的而非概率性的^[9]。这显然与描述基本粒子的量子力学或量子场论的分立性和不确定性格格不入。两个基本理论的矛盾集中体现在著名的爱因斯坦方程中,方程的左边是反映时空几何弯曲情况的爱因斯坦张量,右边则是描述物质场的能量、动量、应力性质的能动张量;由于时空几何用经典理论描述,爱因斯坦张量有确定的观测值,而物质场的本质要由量子理论描述,其能动张量应该是算符取值的张量,相应的观测值应该是概率性的;显然,确定性的值无法与概率性的值保持相等。解决这一矛盾的最直接方法就是把时空几何量子化。

由于量子力学的效应通常只在微观小尺度下表现出来,而广义相对论一般研究大尺度的时空结构,这两个基本理论目前仍可以各自独立地发展。在广义相对论这边,彭罗斯和霍金在20世纪60年代证明了奇性定理^[10],表明在物理上合理的条件下广义相对论的时空无法避免曲率为无穷大的奇点的出现,例如,爱因斯坦方程的宇宙解和黑洞解都会出现奇点。奇点的出现强烈暗示着广义相对论无法适用于曲率趋近于无穷大的区域,在这样一个极小尺度的高能区域很有可能需要引入量子理论的描述来克服经典理论的奇点。在量子场论这边,由于各种能量尺度的量子涨落都会对物理过程有贡献,对物理观测量的直接计算往往都会给出无穷大的结果,对电磁、弱和强相互作用等理论,场论学家可以通过所谓重整化的方法消除理论中的这种奇性。然而,重整化作法的理由尚不清楚,也被称为“将脏东西扫到地毯下面了”^[11]。假如空间在微观尺度有量子性,具有像原子一样最小的单元,它所引入的最小截断将可能为重整化提供依据。可见,广义相对论和量子场论各自的问题以及两者之

间的矛盾性都强烈地暗示着,当代物理学需要一个量子引力或量子时空的基本理论使自身成为一个自洽的完整的逻辑体系。

二、量子引力的不同途径

如何协调现代物理学的两大基础理论——量子力学和广义相对论之间的矛盾,成为物理学理论研究面临的最根本问题。回顾物理学的发展史,那些革命性的重大进展常常就是在协调不同理论和观念之间矛盾的过程中产生的,前面提到的狭义相对论和广义相对论的创立皆是如此。通过创建量子引力理论为物理学提供自洽且牢固的理论基础是很多理论物理学家心目中的圣杯!20世纪初那两场物理学革命的成功鼓舞着他们信心满满地迎接这一新的世纪性挑战。然而,探索量子引力的征程远没有人们最初想象的那么顺利,经过近一个世纪艰苦的努力,人类仍然没能从上帝手中接过量子引力的圣杯。在这条漫漫的探索之路上,各种或惊艳或深邃的思想和方法不断涌现,这些智慧的火花或许已为我们照亮了前行的道路,为探索中的勇士们指引着方向。从研究思路和方法的角度看,当前量子引力的研究大体可以分为两个主要方向,我们沧海拾贝,在这两个方向中挑几个代表性途径,谈谈其中的思想、进展和问题。

1. 将引力作为相互作用量子化

人们常说自然界有四种基本相互作用,即引力、电磁力、弱力和强力。后三种相互作用都已经在量子场论的框架下实现了量子化,量子场论以及建立在其基础上的粒子物理标准模型的成功鼓舞着研究者们首先尝试将量子场论的方法应用到引力相互作用的量子化。量子场论的一个核心思想就是将狭义相对论提供的具有庞加莱对称性的平直的时空结构作为量子场赖以存在的真空背景,量子场或各种基本粒子则是在具有这种对称性的真空上的各种量子涨落或场振动模式,基本粒子之间通过交换玻色子而发生相互作用。而在广义相对

论中,引力是时空几何的弯曲,描述时空几何的度规场是一个动力学变量,一般情况下并不是量子场论真空所对应的平直度规场。因此,将量子场论的方法应用于广义相对论首先要解决的问题就是如何定义真空背景,微扰量子引力的做法就是将动力学度规场看成平直度规场加上扰动度规场,将扰动度规场在平直真空背景上做量子化。这种做法可以给出传播引力相互作用的自旋为 2 的引力子,但理论计算中出现的无穷大无法通过重整化消除^[12],也就是说这是一个不可重整化的理论,不可重整化的问题成为应用量子场论于引力的最大障碍。

科学研究中的障碍也可能是一个转机,为了在量子场论框架下避免引力不可重整化的问题,各种量子引力方案相继涌现。例如:一个特定的场论在不同能量尺度下可以展现不同的性质,渐近安全引力理论试图放弃微扰可重整化的要求,转而通过重整化群变换或能量尺度变换在理论空间中找到引力不发散的不动点,该想法最先由美国学者 Weinberg 于 1979 年提出^[13],从德国学者 Reuter 在 1996 年的工作开始这个方案逐步取得了一些研究进展^[14],被看作是对引力的非微扰可重整性的研究。对引力理论的修改也可能导致可重整性,1997 年德国学者 Wetterich 发现非局域的有效作用量可以克服欧氏爱因斯坦引力作用量的无界性问题^[15],这个问题曾阻碍了对爱因斯坦引力的欧氏路径积分量子化的研究,非局域作用量的引入激发了对非局域引力理论的研究,该方案试图通过放弃引力作用的局域性和微观因果结构来得到可重整化的微扰量子引力^[16]。还有一种对引力理论的修改方式是放弃时空为第一性的观念,2009 年美国学者 Horava 提出了 Horava-Lifshitz 引力理论^[17],试图通过放弃时空协变性,即假设在高能的情况下引力不能表现为一个时空度规,从而实现可重整化的微扰量子引力。这些量子引力的研究方案都没有超出量子场论的框架,目前仍在探索之中。

另外一个超出量子场论框架而影响最大的研究方案是超弦理论^[18],它起源于意大利学者 Ven-

ziano 对基本粒子相互作用的研究^[19]。该理论的基本设想如下:所谓基本粒子不是空间中的点状粒子,而是一维弦的振动,以弦的不同类型和不同振动模式统一描述包括引力子在内的不同基本粒子。研究发现,理论的自洽性要求时空具有 10 个维度,而且理论具有将费米子和玻色子联系起来的超对称性。一般认为,时空超出四维的额外维度卷曲在极小的尺度下,基本粒子的线状而非点状结构为场论中发散问题提供了自然的解决方案,使得弦理论计算中微扰展开的各项都是不发散的。由于这些美妙且简单有效的理论设定,该理论一度被认为是最有希望量子化引力并统一四种基本相互作用的终极方案,被称为“万物理论”(theory of everything)。然而,弦的不同振动模式所预言的基本粒子数量远超过标准模型中基本粒子的数量,在能量越来越高的粒子物理实验中并没有发现这些额外的基本粒子;而且,弦理论所要求的超对称性也没有在实验中发现。尽管可以通过调节弦理论的基本参数使得超对称和额外粒子出现的能标变得高于实验能达到的能标,但理论的实验可检验性已受到质疑。从理论自身的发展看,弦论学家发现,10 维时空可以有五种自洽的超弦理论,种种迹象表明,这五种理论之间存在广泛的对偶关系,它们和 11 维的超引力理论很可能可以看作某个更基本的 11 维的 M 理论的不同极限情况(见图 1)^[20],寻找 M 理论的表达形式成为超弦理论研究的一个非常重要而困难的课题。超弦理论的对偶关系还预示着各种维度的膜也可以和弦一样是基本客体,从而引发关于膜世界的广泛讨论。由于时空额外维卷曲在小尺度下的可能方式极多,不同方式对四维时空中的物理有不同的影响,这使得可能的自洽理论的空间极大,难以从理论上找到最优研究路线。尽管超弦理论的进一步发展面临着一定的困难,该理论研究中出现的一些新的观念和方法已经在数学和物理中产生了深远的影响。例如,额外维紧致化的观念激发了数学上对卡拉比-丘流形的研究,反德西特-共形场论对偶的发现激发了对引力全息性质的探讨等。

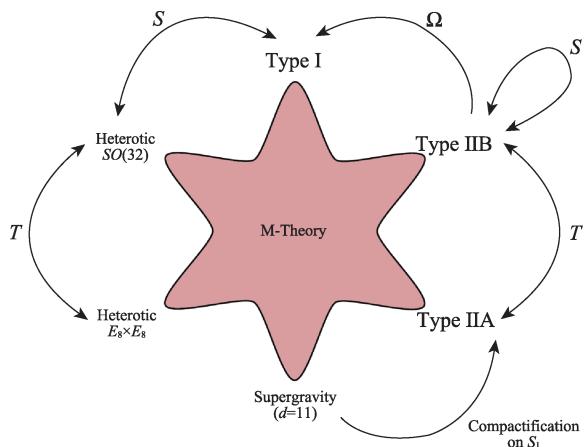


图1 各种超弦理论之间的对偶及背后的M理论
(引自参考文献[20])

2. 将引力作为时空几何量子化

广义相对论的核心思想在于引力的本质是时空几何,从这个观点看,引力与其他三种基本相互作用有本质的区别,它不再是通常意义的相互作用力。因此,将适于描述三种基本相互作用的量子场论的微扰方法应用于引力的量子化缺少观念上的基础,将引力作为相互作用力做量子化的思路是值得商榷的。更重要的是,广义相对论带来物理学思维观念上的革命是深刻的,由于描述时空几何的度规场成为动力学变量,物理学摆脱了自牛顿力学以来一直遵循的绝对时间、绝对空间和绝对时空的观念,即这些绝对的对象可以影响物质的运动,而物质的存在或运动却不能影响这些绝对的对象,这显然是不合理的。广义相对论在观念上的革命使得物理学定律中能够对物理变量产生实质影响的对象本身也必须是动力学变量,物理学定律在这个意义上真正建立在了逻辑合理的基础之上,这正是广义协变性原理的实质内涵。而微扰量子引力的做法恰恰是退回到绝对真空(时空)背景的观念中,难以反映广义相对论的核心思想。因此,微扰量子引力不可重整化的困境不是说明广义相对论不可以量子化,而是说明丢弃了广义相对论的核心观念的量子化做法是行不通的。将广义相对论的思想与量子力学的思想相融合的直接方式就是将引力作

为时空几何量子化。

1967年美国学者德维特(Dewitt)首先尝试以度规场为动力学变量将广义相对论做正则量子化^[21],从几何动力学形式出发,将反映广义相对论的动力学的哈密顿约束写成了算符的形式,被称作正则量子引力的惠勒-德维特方程。然而,惠勒-德维特算符能否在某个量子态空间上良好定义、如何得到量子约束方程的解等难题一直困扰着该量子引力方案。从1986年开始美国学者Ashtekar等人提出了广义相对论的联络动力学理论^[22],联络能够将空间弯曲对不同点之间的物理量的影响表达为空间局部转动对称性群的某个群元,即联络沿着不同点之间的连线的积分所给出的和乐(holonomy)。意大利学者Rovelli和美国学者Smolin随即将规范场论中的威尔逊圈态——闭合的和乐作为正则量子引力的量子态空间的基本组元^[23],成为圈量子引力理论的出发点。该理论中,非局域的和乐是比局域定义的度规更为基本的观念,巧妙地融合了引力的非局域特征和背景不依赖性,使规范场的基本概念与广义相对论的基本概念得以有机结合。通过和乐及其共轭变量可以将哈密顿约束定义为一个自然得到的量子态空间上的算符,并使得构建量子约束方程的解成为可能^[24]。通过不依赖于背景空间的正则量子化过程,空间几何的量子化得以实现,面积和体积等几何量成为量子态空间良好定义的算符,研究表明,它们在微观尺度下的测量值只能是离散的、概率分布的,而不是像经典几何那样连续的、确定性的。几何的量子态表现为由一维的量子面积流线组成的类纤维聚合物形态,称为自旋网络态,多条流线的共同交点含有量子体积的信息(如图2)^[25]。量子物质场则可以定义在自旋网络上,几何的离散结构和协变性的要求能够有效地消除量子场论计算中出现的无穷大。在理论的一些对称约化模型的研究中,圈量子引力学家惊奇地发现,宇宙大爆炸之初的奇点可以在圈量子宇宙学中被量子反弹所避免^[26,27],黑洞内部的奇点在球对称圈量子黑洞模型中也可以被黑洞到白洞的转换所消除^[28,29]。这

些研究进展使人们看到了解决广义相对论和量子场论中的核心问题的曙光。以圈量子引力的正则理论为基础,乌拉圭学者 Reisenberger 首先提出了其初步的路径积分形式^[30],后逐渐发展成为成熟的自旋泡沫理论^[24],时间和空间在路径积分表达式中具有明显协变的形式,时空边界量子态之间的跃迁几率可以借助时空三角剖分巧妙地进行计算,并与正则理论的相关结果进行比较和印证。自旋泡沫理论的一个重要结果是在特定模型的半经典极限下得到了广义相对论的离散路径积分形式。尽管圈量子引力仍面临着在一般情况下如何进行低能近似计算和确定哈密顿约束算符的最终形式等难题,经过近三十年的发展,该理论已成为这个方向上最具代表性且影响最大的引力量子化方案。除了广义相对论,该方案同样适用于 f(R)修改引力^[31]、标量-张量引力^[32]、超引力^[33]和高维引力^[34]等理论。

由于联络的和乐成为基本变量,自旋泡沫模型中配分函数的计算表现为群流形上的积分,De Pietri, Freidel, Krasnov, Rovelli 等人在 1999 年的研究工作激发了一个新的量子引力研究方案——群场论^[35],即将量子引力的路径积分定义在空间或时空局部转动对称性群的流形上,并借鉴圈量子引力的结果,将时空三角剖分的 4-单形理解为量子时空几何的最小单元。该方案可以将场论路径积分的一些方法应用过来,为量子几何路径积分的微扰计算提供了有力的工具^[36]。时空几何的一个要素是因果结构,独立于圈量子引力理论,1987 年 Bombelli, Lee, Meyer, Sorkin 等人提出了另一种将时空几何量子化的方案——因果集理论^[37],该理论将因果结

构看作是比时空度规更加基本的对象,假定时空的微观最小单元具有特定的因果结构,时空的大尺度结构则来自这些微观因果结构的累积效果^[38]。时空几何的概念中除了度规场还有时空流形,坐标是流形上不可或缺的要素,1994 年法国学者 Connes 将量子力学算符的非对易性应用于时空流形的坐标,提出了非对易几何^[39],试图将时空几何建立在坐标算符的谱空间上^[40]。这些大胆且新颖的想法都是试图对时空几何作某种量子化,构成了仍在探索之中的不同的时空量子化方案。

三、总结和展望

通过前面的介绍我们看到,广义相对论和量子力学(或量子场论)各自内在的问题以及两者之间的矛盾性是当代物理学基础理论面临的最根本问题,物理学家们正试图通过创建一个自洽的量子引力理论来解决这些基本问题。量子引力的探索在研究思路上大体分为两个方向,将引力作为相互作用量子化这个方向的研究更多地继承了量子场论的思想,而将引力作为时空几何量子化这个方向的研究则更多地继承了广义相对论的思想。尽管还没有取得最后的成功,但这两个方向的研究都取得了显著的进展。

超弦理论是将引力作为相互作用量子化这个方向上最具代表性的理论,其以一维弦代替空间中的点状粒子、时空额外维度、超对称等新观点极大地拓宽了研究者们的思路,该理论研究中涌现出的对偶、全息等思想和方法已延伸到物理学理论研究的很多方面。将引力作为时空几何量子化这个方向上最具代表性的理论是圈量子引力,其空间点之间的关系更为基本、量子面积、量子体积等概念使研究者们体会到量子几何的独特性质,该理论的模型研究中出现的量子反弹、黑洞到白洞的转换等现象极大地修正了经典广义相对论对宇宙起源和时空结构的理解。有一个值得注意的有趣现象,在这两个思路完全不同的量子引力方案中,空间中一维的弦或线都不约而同地成为了最基本的对象。这

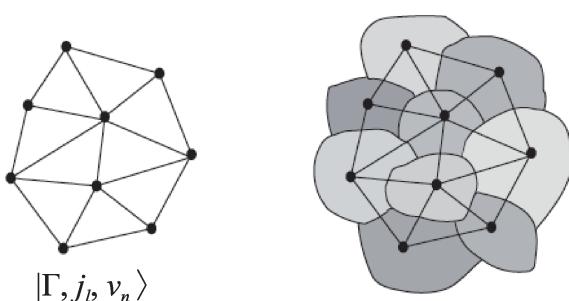


图 2 自旋网络态的量子几何意义(引自参考文献[25])

种殊途同归是否意味着这个本质性的量子客体的真实存在性有待于研究者们去进一步揭示。

毫无疑问，探索者们为物理学创建一个自洽的完整的基本逻辑体系的努力仍将继续下去。人类既是大自然的产物也是大自然的画师，物理学的发展史不断地印证着人类智慧与自然的和谐，对量子引力的不懈探索必将揭开自然迄今最为神秘的面纱，谱写人类认识和思想变革的新篇章。

参考文献

- [1] Sir Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (London, 1687). | St John's College, University of Cambridge.
- [2] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*. 17:891-921. (June 30, 1905).
- [3] A. Einstein, Die feldgleichungen der gravitation, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 844-847 (1915).
- [4] M. Planck, On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der Physik*. 1901. 4(1), 553-563.
- [5] A. Einstein, Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt[J]. *Annalen der Physik*, 1905, 17, 132-148.
- [6] N. Bohr , On the constitution of atoms and molecules: papers of 1913 reprinted from the Philosophical magazine, Munksgaard. 1963.
- [7] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.
- [8] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I, II, III*, Cambridge University Press, 1995-2000.
- [9] 梁灿彬、周彬,《微分几何入门与广义相对论》上、中、下册,科学出版社 2006-2009.
- [10] S. W. Hawking and R. Penrose, The singularities of gravitational collapse and cosmology, *Proc. Roy. Soc. London A* 314 (1970), 529.
- [11] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.
- [12] M. H. Goroff and A. Sagnotti, The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity, *Nucl. Phys. B* 266 (1986), 709-736.
- [13] S. Weinberg in General Relativity, an Einstein Centenary Survey, S.W. Hawking and W. Israel (Eds.), Cambridge University Press (1979).
- [14] M. Reuter and F. Saueressig, Quantum Einstein gravity, *New J. Phys.* 14 (2012), 055022.
- [15] C. Wetterich, Effective Nonlocal Euclidean Gravity, *Gen. Rel. Grav.* 30 (1998) 159-172.
- [16] A. Beneito, G. Calcagni and L. Rachwal, Classical and Quantum Nonlocal Gravity, in *Handbook of Quantum Gravity*, C. Bambi, L. Modesto and I.L. Shapiro (Eds.), Springer Singapore 2024.
- [17] P. Horava, Quantum Gravity at a Lifshitz Point, *Phys. Rev. D* 79 (2009). 084008.
- [18] R. Blumenhagen, D. Lüst and S. Theisen, *Basic concepts of string theory*, Springer, 2013.
- [19] G. Veneziano, Construction of a crossing-symmetric, Regge behaved amplitude for linearly rising trajectories, *Nuovo Cim. A* 57 (1968) 190-197.
- [20] C. Maccaferri, F. Marino, B. Valsesia, *Introduction to String Theory*, *SciPost Phys. Lect. Notes* 90 (2025).
- [21] B. S. DeWitt, Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory, *Phys. Rev.* 160 (1967), 1113.
- [22] A. Ashtekar, New variables for classical and quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986), 2244.
- [23] C. Rovelli and L. Smolin, Loop space representation of quantum general relativity, *Nucl. Phys. B* 331 (1990), 80.
- [24] A. Ashtekar and Y. Ma (Eds.), *Loop Quantum Gravity and Spin-foams*, in *Handbook of Quantum Gravity*, C. Bambi, L. Modesto and I.L. Shapiro (Eds.), Springer Singapore 2024.
- [25] C. Rovelli, Loop quantum gravity: the first twenty five years, *Class. Quantum Grav.*, 28 (2011), 153002.
- [26] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, Quantum nature of the big bang, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006), 141301.
- [27] Y. Ding, Y. Ma, and J. Yang, Effective scenario of loop quantum cosmology, *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009) , 051301.
- [28] A. Ashtekar, J. Olmedo, and P. Singh, Quantum extension of the Kruskal space-time, *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018), 241301.
- [29] J. Lewandowski, Y. Ma, J. Yang, C. Zhang, Quantum Oppenheimer-Snyder and Swiss Cheese models, *Phys. Rev. Lett.* 130 (2023), 101501.
- [30] M. Reisenberger, Worldsheet formulations of gauge theories and gravity, arXiv:gr-qc/9412035.
- [31] X. Zhang and Y. Ma, Extension of loop quantum gravity to f(R) theories, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011), 171301.
- [32] X. Zhang and Y. Ma, Nonperturbative loop quantization of scalar-tensor theories of gravity, *Phys. Rev. D* 84 (2011), 104045.
- [33] N. Bodendorfer, T. Thiemann, A. Thurn, Towards Loop Quantum Supergravity, *Phys. Lett. B* 711 (2012), 205-211.
- [34] N. Bodendorfer, T. Thiemann, A. Thurn, New variables for classical and quantum gravity in all dimensions: III. Quantum theory, *Class. Quantum Grav.* 30 (2013), 045003.
- [35] R. De Pietri, L. Freidel, K. Krasnov, C. Rovelli, Barrett-Crane model from a Boulatov-Ooguri field theory over a homogeneous space, *Nucl.Phys. B* 574 (2000), 785-806.
- [36] D. Oriti, Group Field Theory and Loop Quantum Gravity, arXiv: 1408.7112.
- [37] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer, and R. Sorkin, Spacetime as a causal set, *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987), 521-524.
- [38] C. Wüthrich, The philosophy of causal set theory, in *Handbook of Quantum Gravity*, C. Bambi, L. Modesto and I.L. Shapiro (Eds.), Springer Singapore 2024.
- [39] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, (1994).
- [40] A. Connes, *Geometry and the Quantum*, in *Foundations of Mathematics and Physics one century after Hilbert*, J. Kounineh (Eds.), Collection Mathematical Physics, Springer 2017.