关于黑洞辐射问题的分析

曹黄金 张立国

（沈阳炮兵学院12队 辽宁 110162）（沈阳炮兵学院数学教研室 辽宁 110162）

英国著名物理学家史蒂芬·霍金教授关于黑洞辐射的见解对量子力学和天体物理学的发展产生了重大影响。但是用测不准关系来衡量他的见解，我们不难发现这样的问题：黑洞中的粒子位置越精确，那么这个粒子本身所具有的动量越不准确，反之粒子的动量越精确，那么就越难描述粒子所在的准确位置。本文在此基础上结合测不准原理重新分析了黑洞的辐射现象，提出了一点自己的想法。

一、简单介绍测不准原理

在一般情况下，设体系处于力学量 A 的本征态，则对它测量时，将得到相应的本征值，而不会出现涨落。若在同一态下去测量另一个力学量 B，是否也能得到一个确切值呢？要回答这个问题，就要分析不同力学量涨落之间的关系（特殊的，由测不准原理给出 X 和 P_X 的涨落关系）。

测不准原理是海森伯根据不可能同时精确测定坐标和它的共轭动量这一结论而提出来的。它的准确表达式是 $\Delta P_X \Delta X \geqslant \hbar/2$，其中，$\Delta X$ 表示位置偏差，ΔP_X 表示动量偏差。从这个关系式我们可以得出：如果微观粒子的坐标愈确定（ΔX 越小），则其动量愈不确定（ΔP_X 愈大）；反之，如果 ΔX 愈大，则 ΔP_X 愈小。这是物质粒子波粒二象性的反映，它标志着经典力学量的概念在微观粒子的适用程度。由于 $\hbar$ 非常小，在一般的宏观现象中，测不准原理没有多大使用价值，而且迄今任何精确的测量所得的 ΔX 与 ΔP_X 的乘积都远比 $\hbar$ 的数量级大得多、所以在宏观现象中不经常用到测不准原理。然而在处理微观现象时，无论是作定性讨论，还是作粗略估计，经常要用到测不准原理。

二、对黑洞蒸发的见解及其分析

霍金是这样理解黑洞蒸发的：如果在黑洞中有一颗粒子，它的位置在黑洞中被很好地定义，这意味着它的速度不能被精确地定义。所以粒子的速度就有可能超过光速，这就使得它能从黑洞逃逸出来，粒子就这样缓慢地从黑洞中泄漏出来。

霍金和詹姆·哈特尔以及盖瑞·吉朋斯的合作从另一个角度来揭示黑洞是完全辐射的。他们首先研究了代表非旋转的黑洞归宿的引力场的史瓦西度规：

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 + (1-2M/r)^{-1}dr^2 + r^2(\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)。$$

显然在 $r=2M$ 处有一表现奇性。为了摆脱这种表现奇性，我们可以选择其他的坐标系。取 $t=i\tau$ 和 $x=4M(1-2Mr^{-1})^{1/2}$ 后，史瓦西度规变成欧氏的，即为

$$ds^2 = x^2\left(\frac{d\tau}{4M}\right)^2 + \left(\frac{r^2}{4M^2}\right)^2 dx^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$$

要使 x-τ 平面上的度规和极坐标的原点相似，我们可以这么来做：把坐标 τ 以周期 $8\pi M$ 相等同。

为了追寻 τ 以某种周期 β 相等同的意义，霍金他们考虑从面 t_1 上的场配置 ϕ_1 到面 t_2 上的场配置 ϕ_2 的幅度。这个幅度可以由两种不同的方式来等同：一种方式是由 $\exp(-iH(t_1-t_2))$ 的矩阵元给出；另一种方式是用一个路径积分给出，即 $Z = \langle \phi_2 | \exp(-iH(t_2-t_1)) | \phi_1 \rangle = \int d[\Phi]\exp(iI[\Phi])$。作如下处理：

在矩阵元的表达式中取 $\beta = i(t_2-t_1)$，在路径积分中使 $\phi_1=\phi_2$ 并对所有的场配置 ϕ_n 求和。经处理后 Z 变为

$$Z = \Sigma\langle \phi_2 | \exp(-\beta H) | \phi_n \rangle = \int d[\Phi]\exp(-i\hat{I}[\Phi]),$$

即得到了温度 $T=\beta^{-1}$ 下黑洞辐射的配分函数。这意味着在史瓦西背景中的场的行为正如同处于具有 β^{-1} 温度的热状态中一样。

不难发现，霍金的理解只考虑到测不准原理的一个方面，即位置越精确，动量越不准确。它还存在另一方面，即动量越精确，位置越不准确。若兼顾后者有：粒子一旦逃逸后，由于其速度比光速小，在原则上能很好地定义其速度；这意味着它的位置不能被精确地定义，很有可能回到黑洞里。结合两方面

的考虑,可以得出这样的结论:逃逸概率和进去概率不存在明显差别,所以黑洞蒸发近似不发生。显然这与霍金的见解截然相反。

霍金等 3 人的合作涉及到虚温度的问题,即 $T=\beta^{-1}=-i/(t_2-t_1)$。与虚温度的处境有点相似的负温度并不位于"绝对温度之下",而是位于"无限大温度之上"。在这种意义下可以说负温度比正温度"更高",并且负温度状态可以在晶体的诸原子核磁矩所构成的顺磁系统中具体实现。而虚温度在理论和实践方面没有负温度那么好的结果。从他们 3 人的合作中可以看出虚温度的出现纯粹是数学技巧,至少跟实际脱离得较远。更有可能的是,他们根本没有察觉虚温度会出现。如果以出现虚温度的代价或用容易理解的一些简单工具在解释黑洞辐射的两者之中作出选择,我们会选择后者。

三、一个例子引发的思考

考虑一维无限深势阱中定态粒子的坐标和动量。设处在某定态具有能量为 $E_n=\hbar\kappa_n^2/2m=\pi\hbar^2n^2/2ma^2$ 的粒子,其波函数在阱内为 $\psi_n(x)=\sqrt{2/a}\sin[(\pi/a)nx]$ (其中 $0\le x\le a$)。

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,|\psi_n(x)|^2\mathrm{d}x$$

根据 $$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,|\psi_n(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Delta x=\sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}}$$

得 $\Delta x=\dfrac{a}{2\pi}\sqrt{\pi^2/3-2/n^2}$。$(n=1,2,3,\cdots)$

显然 $$\frac{a}{2\pi}<\Delta x<\frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{1}$$

同理 $$\Delta P_x=\frac{\pi\hbar}{a}n \text{ 且 } \Delta P_x\ge\frac{\pi\hbar}{a} \tag{2}$$

由(1),(2)得: $$\Delta P_x\Delta X>\frac{\pi\hbar}{a}\cdot\frac{a}{2\pi}=\frac{\hbar}{2} \tag{3}$$

(3)式即为测不准原理式。

仔细观察(1)式,很容易看出 ΔX 的表达式有上下界,这是测不准原理所不具备的内容。据此,我们得到如下的不确定性不等式。

定理:设将 $\xi\hat{x}\psi+i\hat{P}_x\psi$ 置于微观领域中时,满足 $\xi>M_0$(M_0 为一正数),则有关系

(Ⅰ) $\Delta P_x\Delta X\geqslant\hbar/2$ 或

(Ⅱ) $\begin{cases}\Delta P_x\Delta X\le\hbar/2\\ \Delta P_x\ge P_0\end{cases}$ 成立。

其中 ψ 为微观粒子的波函数,P_0 是与 M_0 有关的一常数。

证明:引入积分不等式 $I(\xi)=\int|\xi\hat{x}\psi+i\hat{P}_x\psi|^2\mathrm{d}\tau\ge0$,即 $I(\xi)=\xi^2(\psi,\hat{x}^2\psi)+i\xi(\psi,[\hat{x},\hat{P}_x]\psi)+(\psi,\hat{P}_x^2\psi)$,其中 $[\hat{x},\hat{P}_x]=\hat{x}\hat{P}_x-\hat{P}_x\hat{x}$ 令 $[\hat{x},\hat{P}_x]=i\hat{C}$,则

$$I(\xi)=\xi^2\,\overline{x^2}-\xi\bar{C}+\overline{P_x^{\,2}}\ge0 \tag{4}$$

把(4)式看成是以 ξ 为参数的一个二次不等式,所以对任意 $\xi\ge M_0$ 总有判别式 $\Delta\le0$ 或 $\begin{cases}\Delta\ge0\\ I(M_0)\ge0\end{cases}$ 使得(4)式成立。

当 $\Delta\le0$ 时,可得出 $\Delta P_x\Delta X\ge1/2\left|\overline{[\hat{x},\hat{P}_x]}\right|$,由于 $[\hat{x},\hat{P}_x]=i\hbar$,从而有 $\Delta P_x\Delta X\ge\hbar/2$,因此(Ⅰ)式得证,此式即为量子理论中的测不准原理。

当 $\begin{cases}\Delta\ge0\\ I(M_0)\ge0\end{cases}$,解这个不等式组可得 $\begin{cases}\Delta P_x\Delta X\le\hbar/2\\ \Delta P_x\ge P_0\end{cases}$,

其中 P_0 是与 M_0 有关的常数。因此(Ⅱ)式得证。

对于定理中(Ⅱ)式我们作进一步分析,可以看到

$$\begin{cases}\Delta X\le\dfrac{\hbar}{2P_0}\\ \Delta P_x\ge P_0\end{cases}$$

此式可以这样理解:不管速度偏差多么大,位置偏差总有一个上界。因此黑洞蒸发问题就可以这样理解:黑洞中的粒子,它的位置能精确地定义,由于速度偏差很大,因此它的速度就有可能超过光速,从而使它逃逸出黑洞。逃逸出来的粒子,尽管速度定义得很精确,由于它的位置偏差相对很小,几乎不再进入黑洞了。这意味着黑洞是蒸发的,并最终会全部蒸发掉。

四、还存在的一些问题

测不准原理尽管对量子力学的统计性作出了阐述,但是在某种程度上对它还存有争议。争议的焦点不在于这个测不准原理是否代表了对我们现有知识的一项正确的评估,而在于这里是否确定是一基本极限,是事物本质的一种固有特征,或者仅仅是已知知识的一种不充足性,而我们在将来某个时候将加以克服。

利用本文的结论似乎能更好地解释黑洞蒸发问题,至少没有什么突出的矛盾。本文所得结论中涉及的 ξ 大于一正常数,还有待进一步探讨。