

水和物体

——第53届国际物理奥林匹克竞赛试题

理论第三题解答

邓世强¹ 宋 峰²

(1. 深圳市高级中学 518000; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

A 部分: 水滴融合

A.1 解答:

两个水滴的融合, 是生活中常见的物理现象。可以从能量的角度理解这个问题, 水滴融合过程是表面能转换为动能的过程。通过动能的计算从而算出融合后的水球速度。

利用两个球体积不变, 计算融合前后表面积变化以及表面能变化。

首先, 合并前每个水滴的表面能为:

$$E = 4\pi a^2 \gamma \quad (1)$$

式中 a 为水滴半径, γ 为表面张力系数。

其次, 当两个水滴合并成大液滴后(半径变为 a'), 其表面能为:

$$E' = 4\pi a'^2 \gamma \quad (2)$$

融合前后液滴总体积是不变的, 即:

$$2 \times \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi a'^3 \quad (3)$$

由此, 可以求出融合前后表面能差为:

$$\Delta E = 2E - E' = 4\pi \left(2 - 2^{\frac{2}{3}} \right) a^2 \gamma \quad (4)$$

由题给条件, 大液滴获得的动能为:

$$\frac{1}{2} M v^2 = k \Delta E \quad (5)$$

其中 M 为合并后的大液滴质量:

$$M = 2 \times \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \quad (6)$$

代入题给的数值, 计算得到:

$$v = 0.23 \text{ m/s} \quad (7)$$

A 部分是关于液体表面能转化为水球的动能问题。依据题意, 通过计算表面能的变化, 可以容易求解球形水滴初始弹起的速度。

这里我们给出一个与本题内容有关的一个有趣现象。在超疏水表面上, 当小液滴合并时, 会释放表面能, 导致面积收缩。这种能量释放会推动合并后的液滴向上跳跃。蝉的翅膀具有超疏水表面, 能够促进滴落在其翅膀上水的去除。这一过程是一种自然的自清洁系统, 将表面能转化为动能。参见论文: Wisdom 等, 《美国国家科学院院》110, 7992-7997 (2013)。

B 部分: 竖直放置的平板

B.1 解答:

如图1所示, 选取一个研究系统, 该系统受力平衡, 满足

$$P + \rho g z = P_0 \quad (8)$$

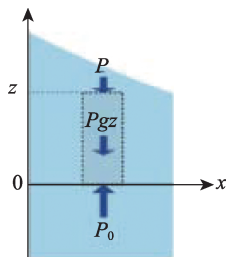


图1

得到:

$$P = P_0 - \rho g z \quad (9)$$

B.2 解答:

因为大气压 P_0 不会对水体产生水平方向的净作用力,所以只需要考虑液体重力差生的压强影响。左右两边在 $z < z_2$ 处产生压力等大,不用考虑,故只需考虑左侧 $z_1 \sim z_2$ 液体产生的压力即可:

$$f_x = \int_{z_2}^{z_1} -\rho g z dz = \frac{1}{2} \rho (z_2^2 - z_1^2) \quad (10)$$

该力的方向向左。

当然,我们也可以这样处理(考虑大气压影响)。先求出水体左侧向右的压力:

$$f_{xl} = \int_0^{z_1} (P_0 - \rho g z) dz = P_0 z_1 - \frac{1}{2} \rho g z_1^2 \quad (11)$$

再考虑水体右侧向左的压力:

$$f_{xr} = \int_0^{z_2} (P_0 - \rho g z) dz = P_0 z_2 - \frac{1}{2} \rho g z_2^2 \quad (12)$$

接着考虑水面处受到大气压的影响,有向左的分力

$$f_{xa} = P_0 (z_1 - z_2) \quad (13)$$

其合力为以上几个力的和:

$$f_x = f_{xl} - f_{xr} - f_{xa} = \frac{1}{2} \rho g (z_2^2 - z_1^2) \quad (14)$$

因为 $z_1 > z_2$, 故 $f_x < 0$, 方向向左。

大气压 P_0 不产生净水平力的原因可理解如下:考虑表面附近的一小块区域(无限细分的微元),将其视为一个直角三角形(如图2所示),大气压作用于直角三角形 ABC 上沿 y 轴单位长度的合力的水平分量为:

$$P_0 \times \overline{AB} - P_0 \times \overline{AC} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 0 \quad (15)$$

对有限区域内的无穷小部分进行积分得到有限体

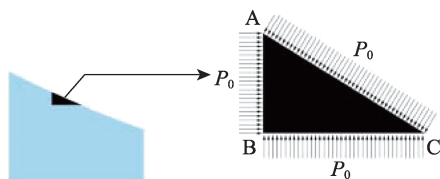


图2

积的水,而合力仍为零。

B.3 解答:

在沿着 y 方向单位长度上受到表面张力大小为 γ , 其方向沿着水面的切线方向, 水体左右两边单位长度表面张力水平方向合力为:

$$\gamma \cos \theta_2 - \gamma \cos \theta_1 \quad (16)$$

水体水平方向合力为零, 即

$$f_x + (\gamma \cos \theta_2 - \gamma \cos \theta_1) = 0 \quad (17)$$

计算得到:

$$f_x = \gamma \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_2 \quad (18)$$

B.4 解答:

由前面结果可知:

$$\frac{1}{2} \rho g (z_2^2 - z_1^2) = \gamma \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_2 \quad (19)$$

整理得:

$$\frac{1}{2} \rho g z_1^2 + \gamma \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \rho g z_2^2 + \gamma \cos \theta_2 \quad (20)$$

因为该式对于水面任意的 (x, z) 都是成立的, 故可以得到守恒量

$$\frac{1}{2} \rho g z^2 + \gamma \cos \theta = \text{constant} \quad (21)$$

与题目中给出的方程式

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{constant}, \quad (22)$$

进行对比, 可以得到:

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\gamma / \rho g} \quad (23)$$

其中 ℓ 称为毛细长度。

注意: 毛细长度是流体在表面张力与重力共同作用下的特征尺度。小尺度 $L \ll \ell$ 时, 表面张力占主导作用; 大尺度 $L \gg \ell$ 时, 重力占主导作用。可以利用球体表面能与重力势能的比较来得到。

对于液体, 其表面能与其表面积的大小成正比, 即 $E_\gamma \sim \gamma L^2$; 重力势能, 取其最低点为零势能处(液体放在一个水平面上, 改变其尺度, 其质心位置改变, 但是和水平面的接触点不变), 则 $E_g \sim mgL$ 。其中 $m = \rho V \sim \rho L^3$ 。所以 $E_g \sim \rho g L^4$ 。取 $E_\gamma \approx E_g$, 则 $\ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ 。当

$L \ll \ell$ 时, 表面能远大于重力势能, 液体的形状由表面能决定, 接近球形, 表面能最小, 总能量也最小; 反之当 $L \gg \ell$ 时, 重力势能远大于表面能, 液体的形状由重力决定, 趋于扁平, 重力势能最小, 总能量也最小。

另外在计算毛细管中液体升高的高度也会涉及毛细长度。半径为 R 的毛细管, 插入液体中, 管中液体与管壁的接触角为 θ 。管中上升的液体体积近似为: $V \approx h \cdot \pi R^2$ 。表面张力在竖直方向分量与液体重力平衡有: $\rho g V = \gamma \cdot 2\pi R \cdot \cos \theta$, 解出 $h = \frac{2\gamma}{\rho g R} \cos \theta = \frac{2\ell^2}{R} \cos \theta$ 。

B.5 解答:

由 $z = f(x)$ 得:

$$z' = \tan \theta \quad (24)$$

因此有:

$$\cos \theta = (1 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

保留到二阶小量有:

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} z'^2 \quad (26)$$

代入到守恒方程中得到:

$$\frac{z^2}{\ell^2} - z'^2 = \text{constant} \quad (27)$$

两边对 x 求导并整理得:

$$z'' = \frac{z}{\ell^2} \quad (28)$$

其通解为:

$$z(x) = A e^{\frac{x}{\ell}} + B e^{-\frac{x}{\ell}} \quad (29)$$

由边界条件确定 A 、 B 系数:

$$z(\infty) = 0, \text{ 解出 } A = 0 \quad (30)$$

$$z'(0) = \tan \theta_0, \text{ 解出 } B = -\ell \tan \theta_0 \quad (31)$$

故:

$$z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-\frac{x}{\ell}} \quad (32)$$

关于二阶微分方程的推导还可以用另一种方法得到。

对 $z > 0$ 的区域的水体, 列竖直方向的受力平衡:

$$\gamma \sin \theta_1 - \gamma \sin \theta_2 = \Delta m g \quad (33)$$

当 $\Delta m \rightarrow 0$ 时, 我们可以把上式写成微分形式:

$$d(\gamma \sin \theta) = \rho g z dx \quad (34)$$

将 $\sin \theta = (1 + z'^2)^{-1/2}$ 代入整理, 略去 z' 的高阶小量, 就能得到

$$z'' = \frac{z}{\ell^2} \quad (35)$$

B 部分先通过分析液体内部压强关系, 再选取微元水体, 对其进行受力分析, 计算出水面高度的微分方程。这里再最后求解微分方程时, 除了按照题意的推导外, 笔者还提出了竖直方向进行受力分析求解的方案。题干引领清晰, 计算难度不大。

整个 B 部分, 都是在讨论微元水体的受力问题。由于液体表面是弯曲的, 导致微元水体左右两边的表面张力不能平衡, 使得水平方向上有向右的分力(16)式, 竖直方向有向上的分力(33)式。

水平方向的分力使得液体左边的更高, 见图3。左右两侧液体对微元水体压力不等。由于在液体内部, 位置越高的地方, 液体压强越小, 产生了“负压”效果, 这个结果在(10)中积分式子的“-”体现。

竖直方向上, 由于两侧表面张力的合力向上, 所以液面会升高, 利用重力来平衡表面张力的分力。这个结果在B.5解答的(33)式有体现。

正是由于液体表面是弯曲的, 导致微元水体左右两边的表面张力不能平衡, 使得在靠近液体表面处的液体压强与大气压不相等。但是, 远离平板处的水平水面位于 $z = 0$ 的 xoy 平面, 由于液面是水平的, 微元水体两侧表面张力平衡, 在液体表面处我们可以取一个很薄的液体薄层, 大气压和液体压强平衡, 故 $z = 0$ 处液体内部压强为 P_0 。

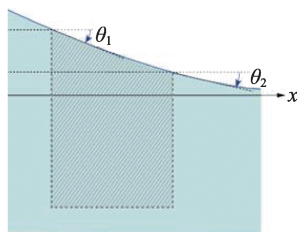


图3

C部分:两根细杆的相互作用

C.1解答:

参考图4,从棒的最低点开始计算液体压强对棒的水平作用力(仍然可以不用考虑大气压强的影响),有:

$$F_{x1} = \int_{z_{\text{bottom}}}^{z_a} (-\rho g z) dz - \int_{z_{\text{bottom}}}^{z_b} (-\rho g z) dz = \frac{1}{2} \rho g (z_b^2 - z_a^2) \quad (36)$$

棒的两边水的表面张力沿水平方向的分量为:

$$F_{x2} = \gamma \cos \theta_b - \gamma \cos \theta_a \quad (37)$$

综上,棒受到的水平作用力为:

$$F_x = \frac{1}{2} \rho g (z_b^2 - z_a^2) + \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) \quad (38)$$

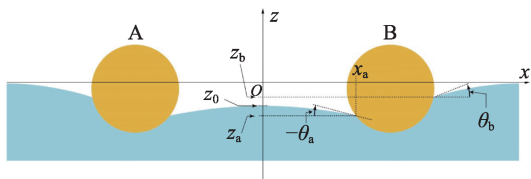


图4 两根漂浮在水面上的细杆的竖直横截面图

C.2解答:

利用前面的守恒方程(21)式,分别代入边界条件:

$$(1) x = 0 \text{ 时 } z = z_0, \theta = 0 \quad (39)$$

$$(2) x \rightarrow \infty \text{ 时 } z = 0, \theta = 0 \quad (40)$$

得到:

$$\frac{1}{2} \rho g z_a^2 + \gamma \cos \theta_a = \frac{1}{2} \rho g z_0^2 + \gamma \quad (41)$$

$$\frac{1}{2} \rho g z_b^2 + \gamma \cos \theta_b = \gamma \quad (42)$$

将以上两式相减得:

$$F_x = -\frac{1}{2} \rho g z_0^2 \quad (43)$$

这里笔者认为可以从另一个角度也能得到这个结果。

对 $x = 0 \sim \infty$ 整体做分析,计算液体压强水平作用力得:

$$F_x = \int_{z_{\text{bottom}}}^{z_0} (-\rho g z) dz - \int_{z_{\text{bottom}}}^0 (-\rho g z) dz = -\frac{1}{2} \rho g z_0^2 \quad (44)$$

这里不需要考虑表面张力,因为左右两边的 θ 均为零。

C.3解答:

微分方程的解为:

$$z(x) = A e^{\frac{x}{\ell}} + B e^{-\frac{x}{\ell}} \quad (45)$$

由对称性可知:

$$A = B \quad (46)$$

将边界条件 $x = 0$ 时 $z = z_0$ 代入,得:

$$z_0 = A + B \quad (47)$$

得到水面高度方程为:

$$z(x) = \frac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{x}{\ell}} + e^{-\frac{x}{\ell}} \right) \quad (48)$$

再将 $x = x_a$ 时 $z = z_a$ 代入,解得:

$$z_0 = \frac{2z_a}{e^{\frac{x_a}{\ell}} + e^{-\frac{x_a}{\ell}}} \quad (49)$$

C部分以液体中漂浮的小棒为研究对象,因其左右两侧的不对称,分析其受到的液体的压强以及表面张力,得到两个小棒相互吸引的结果。学生只要认真审题,理解题意,并一步步完成即可。

其实该部分的思路和B部分是一样的。B部分是以微元水体为研究对象,研究其受力平衡问题。C部分是以漂浮在液体上的木棒为研究对象,研究其受力情况。如C.1中计算水平方向液体压力的合力(36)式,以及计算表面张力合力的(37)式。