物理竞赛中的分布力与微元分析法

严　明
(上海市上南高级中学　200126)

物理竞赛辅导对物理特长生的发展很有必要。物理竞赛对知识和思维能力的要求特别高,各种物理思维的形成都需要经过一段从感知到内化的过程,而这个过程是要通过一系列的相关“板块”问题的练习来逐步提炼。本文就分布力与微元法的“板块”问题作一序列分析。

物体的个别点受到作用力时,称这种力为点分布力。绳通过与物体联结处对物体施力,当联结处可近似为一个点时,所施力属于点分布力。当物体的某线段上所有点均受到作用力时,称这种力为线分布力,如冰刀若足够薄,刀与冰面接触处可近似为一条线段,其间摩擦力属于线分布力。物体的某表面区域上所有点均受到作用力时,称这种力为面分布力。无论绳与物体连结处,还是冰刀与冰面接触处,实际上都是一个面区域上的力,它们来源于面分布力。物体的某块体区域中所有点均受到作用力时,称这种力为体分布力。地面上物体所受重力为体分布力。

如果将物体简化为点(质点),物体上所受的各种分布力均简化为点作用力。而线、面、体分布力的研究通常要借助微元分析法,因为那些力都是连续分布的力。下面举例说明。

例1　如图1所示,光滑水平面上放一质量为 m 的均匀细圆环,半径为 R,绕过圆环中心的竖直轴以角速度 ω 匀速转动,求圆环中的张力是多大?

解:取圆环上极小一段圆弧 ΔL,它对应的圆心角为 $\Delta\phi$。因 $\Delta\phi$ 很小,所以圆弧上任一点的向心加速度 a_n 方向相同。

圆弧两端受切向张力 T,由对称性可知,两侧张力

个正电荷 q 在图2(a)所示的电场中从 A 点静止释

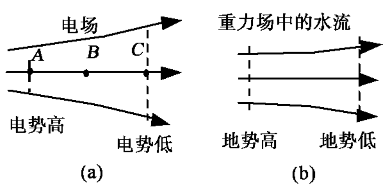


图2　电场与水流相似

放,它会在电场力作用下自动地向 B 处移动,在此过程中电场力做功使电荷获得动能。可见电场中 A 点相对于 B 点存在一种优势,A、B 这两位置之间潜在着一种对电荷做功的能力。这就是说,电场中存在着一种与位置有关的势,我们把它叫做电势。

更具体地,把用电场线描述的电场与水在重力场中的流动相类比。沿水流方向地势从高到低,则在电场中沿电场线方向电势从高到低,如图2(a)和(b)。

电势差的定义:再来研究一下电场力做功的情况。电荷在确定的 A、B 两点之间移动,电荷量大,受的电场力也大,电场力做功就越大,电场力做功与电荷量成正比。在电荷量一定的情况下,电场力做功与始末位置有关,例如在图2(a)情况中,电荷从 A 点移到 C 点,电场力做的功比电荷从 A 点移到 B 点电场力做的功大。从电势角度讲 A、C 间的电势差值大于 A、B 间的电势差值。所以电场力做功还与始末位置的电势差有关。与重力做功相似,电场力做功可以表示为:电场力做的功 = 电荷的电荷量 × 电场中两点间的电势差。即 $W_{AB} = qU_{AB}$

从上式可得到电场中两点间电势差的定义:电场中 A、B 两点之间的电势差 U_{AB},等于电荷 q 从 A 点移到 B 点电场力做的功 W_{AB} 与电荷量 q 的比值。即 $U_{AB} = W_{AB}/q$

通常所说的电压,其本质含义就是这里的电势差。

电势的定义:顾名思义,电势差应该是电势之差。电势是这样定义的:确定参考点 O,并规定 O 点的电势为零,电场中任一点 A 的电势 U_A 等于 A 点到 O 点之间的电势差 U_{AO},即 $U_A = U_{AO}$

通过一些例题求解,使学生获得沿电场线电势降低的直观印象,明确电势与电势差的关系,得出关系式 $U_{AB} = U_A - U_B$

历届学生普遍反映电势和电势能难学难懂。本教学设计,由于把电势联结在文化背景中势的一般含义和地势的直观概念这两个稳固的生长点上,克服了电势的抽象性;同时把电势和电势能分开教学,减小了它们的相互干扰,极大地降低了学习难度。实际教学表明,反映本章难学的学生人数大大减少了。

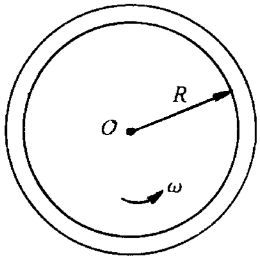
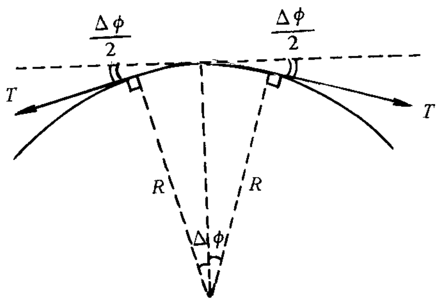


图1

T的大小相等(如图2所示)。由图中几何关系:$2T = \sin\Delta\phi/2 = \Delta m a_n$ 式中Δm为小圆弧的质量,其大小为:



$\Delta m = \Delta L m/$

由于 $a_n =$

并且$\Delta\phi$很小,有近似关系:$\sin(\Delta\phi/2) \approx \Delta\phi/2$

解得:$T = m\omega^2 R/2\pi$

点评:连续力的处理方法通常是将“连续的研究对象”转化为“点”。从连续的对象中任取一小段Δl,表示出Δm,然后对其进行受力分析和近似处理。而$\Delta\phi$很小时有近似关系:$\sin\phi \approx \phi$或$\mathrm{tg}\phi \approx \phi$。

例2 如图3所示,静止的圆锥体竖直放置,顶角为α,质量为m、并分布均匀的链条环水平地套在圆锥体上,忽略链条与锥面之间的摩擦力,试求链条中的张力。

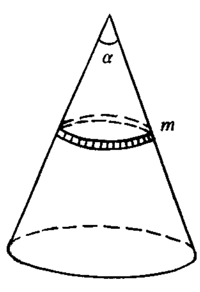


图3

分析:如图4所示,设链条环半径为R,在链条环中任取一小段Δl,其质量为$\Delta m = m\Delta l/2\pi R$。$\Delta m$的受力为:圆锥面的支持为$N$,其方向垂直于圆锥面;重力$\Delta mg$以及$\Delta l$两端所受的张力$T$。平衡时上述各力在水平面的分力之和为零,在铅垂方向的分力之和也应为零,列出两个方程,即可求解。

解:如图5,圆锥面支持力N在水平面内的分力为$N\cos(\alpha/2)$,它与Δl小段两端所受张力T应达到平衡,设Δl对链条环中心的张角为$\Delta\phi$,则有$2T\sin(\Delta\phi/2) - N\cos(\alpha/2) = 0$

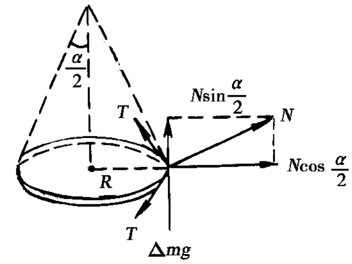


图4

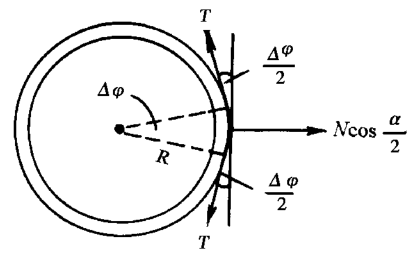


图5

因Δl很短,$\Delta\phi$很小,故有$\sin(\Delta\phi/2) \approx \Delta\phi/2$代入得:$T\Delta\phi - N\cos(\alpha/2) = 0$ ①

Δl段在竖直方向也应受力平衡:$N\sin(\alpha/2) - \Delta mg = 0$ ②

由①②可得:$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\Delta m}{T\Delta\phi}g$ 而$\Delta m = \dfrac{\Delta l}{2\pi R}m = \dfrac{\Delta\phi}{2\pi}m$,

所以环中的张力:$T = mg/2\pi\mathrm{tg}(\alpha/2)$

点评:研究对象与方法还是选取Δl与近似处理的微元分析法。力学问题总离不开受力分析,某方向“平衡”则$\sum F_x = 0$,若某方向有加速度则$\sum F_y = \Delta m \cdot a$。而将立体受力转换成平面受力也是解决本题的一个关键。

例3 如图6所示,一半径为R的刚性光滑球体静止放置。质量为M的圆环状均匀弹性绳水平套在球体上,已知绳环原长时的半径为$a = R/2$,套在球体上时绳环的半径变为$b = \sqrt{2}a$。试求弹性绳的劲度系数k。

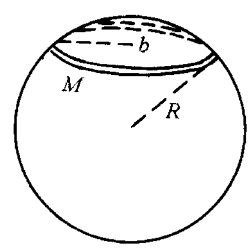


图6

分析:如图7所示,任取长为Δl的一小段绳环,其质量为:$\Delta m = M\Delta\phi/2\pi$(其中$\Delta\phi$是$\Delta l$对环中心的张角)。该小段受力为:重力$\Delta mg$,竖直向下;球体支持力$N$,与球面垂直以及$\Delta l$两端的弹性

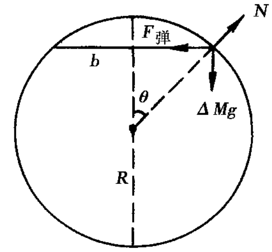


图7

力 T，与绳环在 Δl 两端相切(这两个弹性力 T 的合力 $F_弹$ 指向绳环的中心)。弹性力 T 应与绳环的伸长量 $2\pi(b-a)$ 成正比，比例系数即为所求的弹性绳的劲度系数 k。由 Δl 段的平衡条件——所受合力为零，列出方程，即可解出 k。

解：在绳环所在的水平面内的受力如图 8 所示，Δl 小段受到的支持力 N 的分力为 $N\sin\theta$，两个弹力 T 的合力为：

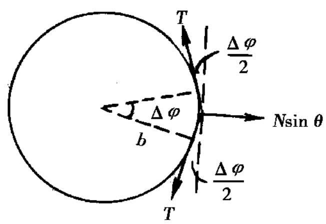


图8

$$F_弹 = 2T\sin(\Delta\varphi/2) \approx T\Delta\varphi$$

又弹力 $T = k\cdot 2\pi(b-a)$

得：$F_弹 = k\cdot 2\pi(b-a)\Delta\varphi$

平衡时，水平方向：$N\sin\theta - k\cdot 2\pi(b-a)\Delta\varphi = 0$ ①

竖直方向：$N\cos\theta - \Delta mg = 0$

$\therefore N\cos\theta = Mg\Delta\varphi/2\pi$ ②

由①②可得 $k = \dfrac{Mg\,\mathrm{tg}\,\theta}{4\pi^2(b-a)}$

又 $\sin\theta = b/R = \sqrt{2}/2$ 得：$\mathrm{tg}\theta = 1$

$\therefore k = (\sqrt{2}+1)Mg/2\pi^2 R$

点评：此题的方法与上题同类，但增加了将“球面”转换成该位置的“等效圆锥面”处理方法。

例 4 将放在地上的长木板绕其固定的一端转动角 α，木板长度为 L，质量为 M，木板与地面之间摩擦系数为 μ，则所需最小的功为多少？

解：转动木板所需最小功就是克服摩擦力所做的功。因木板均匀，作用在板上长度为 Δx 一段的摩擦力为：$\Delta f = \mu Mg\Delta x/L$

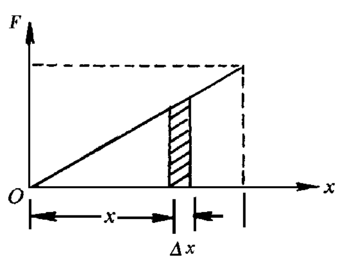


图9

设板上某一点距静止端为 x，该点转动时通过的路程为：$s = \alpha x$，如图 9 所示，Δx 一段木板克服摩擦力做功为：$\Delta W = \Delta f\cdot s = \mu Mg\alpha x\Delta x/L$

即等于图中画斜线部分的“面积”(Δx 段扫过面积)与常量 $\mu Mg/L$ 的乘积。

因此转动木板所做全部功等于图像下面所围面积(木板所扫过的面积)与常量 $\mu Mg/L$ 的乘积。

$$\therefore W = \frac{\mu Mg}{L}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\pi L^2\right) = \frac{1}{2}\mu Mg\alpha L$$

点评：这是面分布的变力问题，用微元法的一个好处就是可将很小范围内的变力当作恒力来处理。本题的另一个处理方法是：用扫过的面积来表示两坐标量相乘所对应的物理量。

例 5 如图 10 所示用细绳悬挂的两个物体 A、B 的质量分别为，m_A、m_B，细绳不可伸长且质量忽略不计。与细绳接触的圆盘固定不可转动，圆盘半径为 R，设圆盘与细绳间无摩擦，试求细绳与圆盘接触处单位长度细绳所受的法向支持力大小 n。

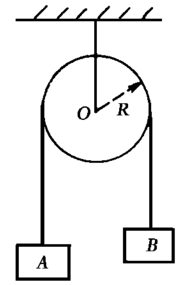


图 10

解：细绳与圆盘接触处的各个部位均可用图 11 中的由圆盘中心作向右的方向线所夹 θ 角来定位。取 $\theta\to\theta+\Delta\theta$ 方位的一小段细绳，当 $\Delta\theta$ 取为无限小量时，该段细绳长为：$\Delta l = R\theta$

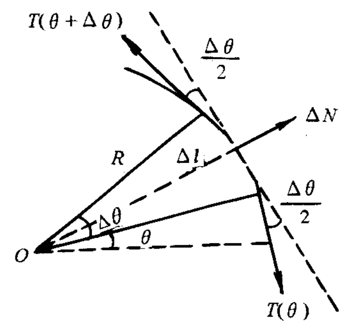


图 11

该段细绳两端绳的张力分别记为 $T(\theta)$ 与 $T(\theta+\Delta\theta)$，圆盘所受支持力记为 ΔN。过细绳段中间点的切线如图 11 中虚线所示，则 $T(\theta)$ 与 $T(\theta+\Delta\theta)$ 与此虚线夹角均为 $\Delta\theta/2$。

由于细绳质量忽略不计，细绳段没有质量，无论它怎样运动，合外力必为零，所以，沿着虚线方向有：

$$T(\theta+\Delta\theta)\cos(\Delta\theta/2) - T(\theta)\cos(\Delta\theta/2) = 0$$

得：$T(\theta+\Delta\theta) = T\theta$

表明绳中张力 T 与 θ 无关，为常量。绳沿法线方向的受力：

$$T(\theta+\Delta\theta)\sin(\Delta\theta/2) + T(\theta)\sin(\Delta\theta/2) - \Delta N = 0$$

又 $\sin(\Delta\theta/2)\approx(\Delta\theta/2)$ 得：$T\Delta\theta = \Delta N$

则单位长度细绳所受支持力为：$n = T/R$

对 A、B 两物体建立动力学方程：$m_A g - T = m_A a$ 和 $T - m_B g = m_B a$ 解得：$T = \dfrac{2m_A m_B g}{(m_A+m_B)}$

代入上式得：$n = \dfrac{2m_A m_B g}{(m_A+m_B)R}$

点评：求“法向支持力”实质上还是将“线接触力”转化为“点接触力”的问题。由“线”到“点”肯定首选“微元分析法”与近似处理；绳的张力通过动力学方程来解得。

例 6　如图 12，游乐列车由许多节车厢组成。列车全长 L，圆形轨道半径为 R（R 远大于一节车厢的高度和长度，但 $L > 2\pi R$）。试问：列车在水平轨道上应具有多大初速度，才能防止列车开上圆轨道时车厢不脱离轨道？（假定轨道光滑）

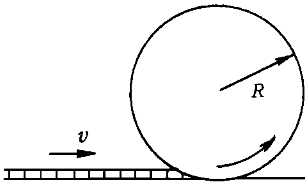


图 12

分析：列车开上圆轨道时速度开始减慢，当整个圆轨道上都挤满了一节节车厢时，列车速度达到最小值 v，此最小速度一直保持到最后一节车厢进入圆轨道。一节车厢（$m = Ml/L$）在圆轨道上最危险的位置当然在圆的最高点（如图 13），临界情况下最高点的车厢对轨道压力恰为零，此时车厢的向心力应是

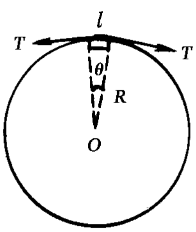


图 13

$$2T\sin(\theta/2) + mg = mv^2/R$$

如图 14 所示，T 为相邻两节车厢之间的拉力。由于圆轨道上挤满车厢后，圆轨道上所有车厢都作匀速圆周运动，所以拉力 T 做的功应等于车厢重力势能的增加，由此可得拉力 T，从而求出列车的初速度。

解：(1) 设最高点车厢拉着右半圆上的车厢移动了 Δx，使车厢整体重力势能增加了 $\Delta mg2R$，Δm 是长 Δx 车厢对应的质量，$\Delta m = (M/L)\Delta x$，车厢间的 T 做功使车厢重力势能的增加。

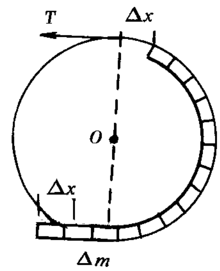


图 14

拉力功 $W = T\Delta x = \Delta mg \cdot 2R = (M/L)\Delta xg2R$，得：$T = 2MgR/L$

(2) 设每节车厢质量为 m，长为 l，则 $m = (l/L)M$

当最高点车厢对轨道压力为零时，$2T\sin(\theta/2) + mg = mv^2/R$

由于 $l << R$，所以 $\sin(\theta/2) = (\theta/2) = l/2R$，得车厢在最高点的速度：$v = \sqrt{3gR}$

(3) 设整个列车质量为 M，圆轨道上所有车厢质量应为 $2\pi RM/L$

根据机械能守恒定律：$Mv_0^2/2 = Mv^2/2 + 2\pi R^2 Mg/L$

∴列车最小初速度：$v_0 = \sqrt{gR(3 + 4\pi R/L)}$

点评：临界位置的确定（当整个圆轨道上都挤满了一节节车厢时，列车速度达到最小值 v_0）是第一要点。而在建立的向心力算式中，相邻两节车厢之间的张力 T 的获得为第二要点，应选用“微元分析法”与近似处理。但上题求的是不计质量细绳间的张力，本题则要求的是有质量物体间的张力，问题中若已知不同位置的速度，一般选用动能定理或机械能守恒定律来处理。对一类问题的系列分析与训练，有利于学生对该类问题处理方法的进一步理解和内化为学生自身的思维结构。

科苑快讯

能建立个人“健康肖像”的红外传感器

据俄通社－塔斯社莫斯科 4 月 29 日报道，俄罗斯科学家研制的仪器能诊断早期癌症和测定食品中是否存在硝酸盐，甚至能建立个人“健康肖像”。

俄罗斯科学院普罗霍罗夫普通物理研究所纤维光学科学中心著名科学家列昂尼德·布特温博士指出，这种名为“红外线传感器”的仪器是为诊断糖尿病研制的，但是它的应用范围要广泛得多。新型仪器的作用原理很简单，几乎所有物体都会辐射红外线，而红外线传感器能记录这一辐射，任何有机分子体或无机分子都具有自己特有的“肖像”。仪器检测化学成分不是根据其元素，而是根据其化学公子式，因为每种蛋白质或物质都具有自己的光谱。

列昂尼德·布特温博士介绍说，“癌细胞由于异常代谢会分泌特殊物质，红外线传感器一旦接触即能识别这种物质，而且传感器能在癌肿块形成初期确定癌细胞的存在，而组织学家，特别是 X 射线学家只能看到已经长到 3 厘米大小的肿块。”

布特温博士强调指出，只要仪器直接碰一下嘴唇即可知道他是否患糖尿病或易患糖尿病，在下嘴唇没有附加的保护黑色素层，而毛细血管和细胞间液体含有与整个人体中相同的糖浓度。借助于传感器可以编制个人“健康肖像”，为此需要将健康者的资料与患者指标进行比较，从而查明是否患有某种疾病。

（周道其译自俄通社－塔斯社莫斯科 4 月 29 日消息）