自然现象中的黄金比之谜

许梅　译
(中国科学院　北京天文台)

向日葵葵花子的排列, 植物叶子的分布, 猎鹰猎物时的飞行路线, 兔子的繁殖, 鹦鹉螺和其他软体动物身上的螺线, 旋涡星系的外貌以及黑洞是如何从一种状态改变为另一种状态的? 这些毫不相干的自然现象之间有什么共同之处吗? 答案是: 所有这些现象都与一个奇异的数字黄金比有关。

黄金比又称/ 黄金分割0, / 黄金数0, 甚至有人称之为/ 极好的比例0, 其实就它本身而言, 完全不是什么新的概念。希腊几何学的泰斗欧几里德, 公元前300年在亚历山大执教时, 在其有关几何学和数学的著作5几何原本6一书中对黄金数就做出过定义。但他的定义完全限定在几何学的范围之内, 并未揭示它与自然现象有丝毫关联。事实上, 黄金数只不过是几何学家们对一条线段进行不等分的一种朴素而又有趣的分割而已。欧几里德根本不会知道, 这种看似简单的分割会在他死后在数学家、物理学家、植物学家、心理学家以及艺术界中风靡几千年。

欧几里德数出自于几何学: 取任一线段, 将其分成两部分, 让其长线段与短线段之比等于整个线段与长线段之比。假设短线段的长度为1, 长线段为x (图1), 则整个线段的长度是 1+ x。根据欧几里德下的定义, 黄金数的值为x/1, 即长线段对短线段之

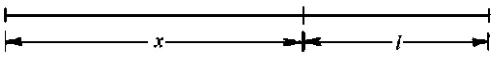

图　1

比; 此比值又必须等于(x+　1)/x, 即整个线段对长段之比, 于是利用代数知识可解出x 的值。x 是一个不循环的无限位数的小数 1.6180339887 , , , 一般用希腊字母 phi(<) 表示, 注意不可与字母 pi(P) 混淆, P 是圆周的长度与其直径之比, 同样也出现在自然科学的各个重要分支中。它们的原始定义几乎人人都懂, 但当它们再次出现在生活中时, 却披上了种种神秘的外衣。< 与P 一样, 都是无理数, 即不能用两个整数之比来表示。实际上, 从数学上说 < 是/ 最无理的数0, 就是说, 如果将它近似地表达为一个连分数, 你就会发现它的收敛速度要比任何无理数的近似连分数都要慢。

黄金数 < 之所以在纯数学领域长期处于令人费解的境地, 是由于它常常在最令人意想不到的地方出现。以向日葵为例: 向日葵的小花形成各样的顺时针及逆时针方向的缠绕在一起的螺线图案, 但总的纹理仍清晰可见(图2)。每个小花在向日葵中心出现并由其后来者推向外沿。螺线图案正是小花生长过程中最容易、最有效的压紧方式所造成的后

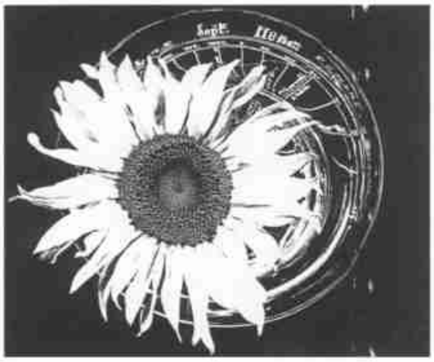

图　2

果。顺时针和逆时针方向螺线的数目与向日葵的大小有关, 通常会发现一个方向有55条, 而反方向34条, 还有时是89条对55条, 或144条对89条, 甚至有报道233和144条的。神奇的是, 各对数字的比越往后越逼近于黄金比的值 <!

向日葵的螺线图案与1837年法国两兄弟的发现之一密切相关。他们是晶体学家Auguste Bravais和植物学家Louis Bravais, 两人观察到, 当新的嫩叶从植物枝顶冒出时总是沿着与枝干四周旧叶呈137.5b的夹角方向生长, 而137.5b正是用圆周角360b除以 <(1.618 , ,), 然后再从360b中减去这个商得来的。

为什么植物树叶的分布方式偏偏与线段的分割比有关联呢? 如果树叶之间的夹角为90b, 或是360b的其他什么简单的分数值角度的话, 则树叶会沿着树干一层遮盖一层, 留出未被填充的大片空间(在90b情况下, 沿树干只伸出4条/ 直线0), 这样的排列方式不利于植物生长, 因为树叶相互遮盖就阻挡了它们所接

受到的阳光。由 < 所确定的这个角度安排叶子的生长, 会使得叶子之间的相互遮挡的机会最小而又能最充分、最有效地占据最大的空间汲取阳光。

植物学中有很多与黄金比有关的现象, 就拿黄金矩形来说, 所谓黄金矩形就是其长边与短边之比为 < 的矩形。如果从该矩形的一端切下一正方形, 剩下部分仍为一个黄金矩形, 像这样无限地切割下去, 便可得到一个比一个更小的黄金矩形。除黄金矩形之外, 任何其他一种矩形都不具有上述特性; 即依次切割正方形后, 剩下的矩形保持相同的长短边之比。对于黄金矩形, 如果顺次将逐个正方形的相对两顶点以光滑曲线连接起来, 便会得到一条称为对数螺线的曲线(图 3)。这条曲线的命名起源于 17 世纪瑞士数学家 Jakob Bernoulli 的一项观察。他注意到在对数曲线上, 由螺线中心到该曲线任何一点距离的对数正比于它所前进的角度; 换言之, 从螺线中心(极点) 划出的放射状直线在相邻两圈的曲线之间的长度, 由里向外, 顺次构成一个等比级数(图4) 。

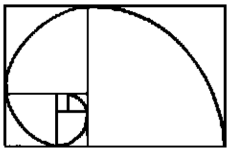

图 3

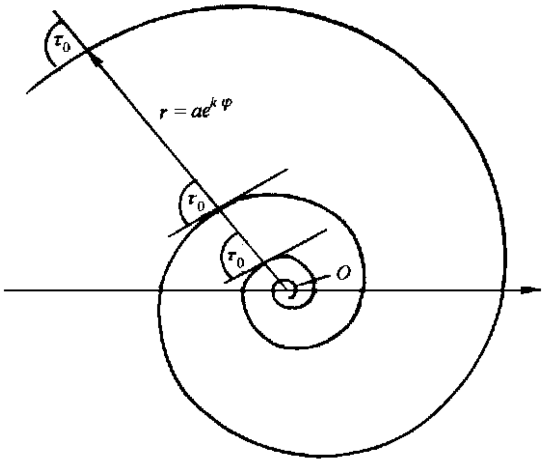

图 4

Bernoulli 发现对数螺线的形状不因其大小而改变。这种性质称为自相似。为此, 他认为/ 螺线可以用作一种象征, 它既可以代表在逆境中坚毅不屈, 也可以代表人体在经历一切改变, 甚至是死后, 也会恢复到其真实完美的自身0。他请人把对数螺线图案刻在自己的墓碑上, 不幸的是, 匠人在他的墓碑上只刻上了像纸巾卷那样简单的圈状图形。也就是相邻两圈之间距离相等, 如 6, 6, 6, 6 , , 等的阿基米德螺线。

对数螺线的另一有趣的特性是它的等角性: 从螺线的中心向曲线上任意一点划一直线, 总是切出丝毫不差的相同的角度(即该直线与过该点曲线的切线形成的角度 S0)。猎鹰捕捉猎物时就是按照这一特性倾斜飞行的。美国杜克大学的生物学家 Vance A. Tucker 多年来研究猎鹰, 他发现猎鹰总是沿着一条略微弯曲的弧线而不是垂直下落去捕捉猎物。Tucker 最终发现, 猎鹰某一眼视网膜的中央凹下之处是它视力最精准的部位, 在捕捉中, 总是让这一部位锁定目标。在向下俯冲时, 为了使视网膜中央凹下部位始终瞄准猎物, 猎鹰就必须将头向左(或右) 歪 40b。风洞试验表明, 歪头这一动作会大大减慢猎鹰下冲的速度。因此, 既要保持头部直起, 又要以最有效的角度将猎物锁定, 猎鹰自然会沿着一条大大拉长了的对数螺线的曲线飞行。自然界好像十分偏爱对数螺线, 从鹦鹉螺到飓风, 以至旋涡星系, 都显示有这种螺线。有时, 在鹦鹉螺壳上, 确实见到了自然出现的加性生长的图案(图 5) 。

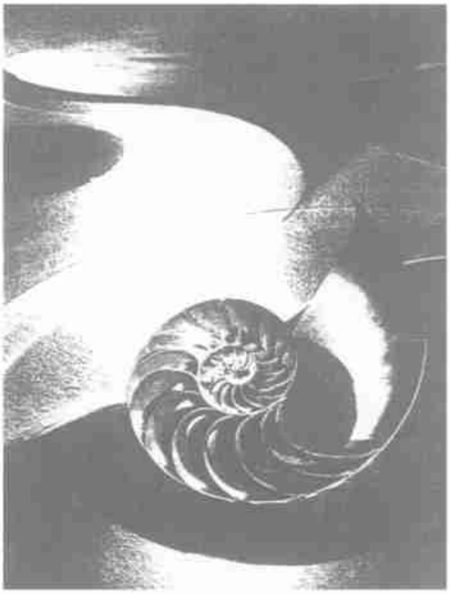

图 5

正是通过这种图案, 黄金比才与 13 世纪初意大利数学家 Leonardo Fibonacci 发现的斐波那契数列发生了密切的关系。1202 年出版的 Fibonacci 著作 Liber abaci(一本讲算盘的书) 中, 他提出了一个有关兔子繁殖的有趣的问题: / 一个人养了一对幼兔, 并把它们用墙围了起来。假设一对兔子每月可以生出一对小兔子, 而小兔子出生后两个月就有生殖能力, 问从一对幼兔开始, 一年后能繁殖成多少对兔子?0 这一问题答案如下: 从第一对幼兔算起, 一个月后, 还只有这一对, 这时它们快接近成熟期了, 到了第三

个月, 生出一对兔子, 有 2 对了; 第四个月, 变成 3 对, 因为第一对兔子又生出一对, 到第五个月, 就有了 5 对(第二对幼兔也已成熟生育了)。依次类推, 其结果, 得到一个数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 , , 等等。从第三项起, 每一项都等于前两项之和。这一数列在 19 世纪被法国数学家 E2douard Lucas 命名为斐波那契数列。

你也许注意到斐波那契数列中的一些数似曾相识: 它们与向日葵葵花子顺时针与逆时针方向螺线的数目相同, 以及两个方向螺线数目之比近似于 < 值 1. 618 , , , 而如果计算出斐波那契数列中相邻两数之比(表中取小数点后六位) , 可见其比值沿 < 值上下浮动, 而且越往后, 越向 < 值收敛。

1/ 1= 1. 000000
2/ 1= 2. 000000
3/ 2= 1. 500000
5/ 3= 1. 666667
8/ 5= 1. 600000
13/ 8= 1. 625000
21/ 13= 1. 615385
34/ 21= 1. 619048
55/ 34= 1. 617647
89/ 55= 1. 618182
144/ 89= 1. 617978
233/ 144= 1. 618056
377/ 233= 1. 618026
610/ 377= 1. 618037
987/ 610= 1. 618033

因此, 斐波那契数列是一种隐蔽的黄金比形式, 而黄金比有时还出现于最令人意想不到的地方。例如, 动物细胞内由蛋白质聚合物构成的中空柱状的微管, 它们构成了细胞骨架, 有助于使细胞维持一定的形状, 还能起到一种细胞- 神经系统. 的作用。典型哺乳动物的细胞微管由 13 条原纤维组成, 其中 5 条右旋, 8 条左旋(5、8、13 都是斐波那契数列的数目)。而且, 人们偶然发现一个带外包层的双微管, 它居然由 21 条原纤维构成, 这 21 又是下一个斐波那契数列的数! 微管中为什么会出现斐波那契数列的确切原因还不清楚, 但一些科学家已经确认, 这种结构的管比其他可能的结构更有效, 更利于起到- 信息处理器. 的作用, 但由于这组数字就只有 4 个, 故也可能这种吻合纯系巧合!

从微观世界再转向宏观自然现象, 我们发现许多盘状星系的旋臂与对数螺线的形状非常相似(图 6)。旋臂之所以醒目, 是由于旋臂之处正是众多亮星的出生地, 一般说来, 较年轻恒星总比较年老的要亮。但是, 为什么星系的旋臂会如此长时间地维持

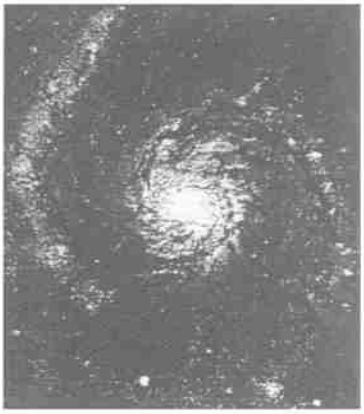

图 6

这种形状不变呢? 这是天体物理学的一个难题, 目前有一种解释是: 与固态物质组成的圆盘不同, 盘状星系中越靠近中心的恒星或其他物质绕星系中心旋转得越快。这样, 由那些亮星构成的旋臂就应迅速/ 卷紧0))) 但这意味着, 旋涡星系的数目应比现在所观测到的要少得多。旋涡星系的旋臂并不是像人们表面上所看到的那样, 是由星系中心流出的首尾相连的物质构成的, 其实它是气体压缩时的波动扫过星系盘的结果。气体被压缩之处会触发新的恒星的诞生。因为星系中物质的分布是不均匀的, 因此气体波动便以一种干涉图形保持着螺旋效应。

在某些黑洞的热动力学方面, 黄金比甚至起着一种意想不到的表现。可将黑洞分为两类, 不旋转(用物理学家的术语, 角动量为零) 的和转动的。转动的黑洞因新西兰物理学家 Roy Kerr 的研究而被称为克尔黑洞。克尔黑洞又以两种状态存在, 一种是当它们丧失能量时被加热, 另一种则是被冷却。这两种状态还会相互转换。而转换的条件恰恰是只有在其质量的平方与其角动量的平方比(在适当的单位下) 为 < 值之时。这一神奇现象源于黄金比的另一独特的数学性质: < 的平方恰恰等于 1+ <!

自然现象中黄金比的种种数不胜数的神奇作用引起了人们极大的好奇心, 从而激发了知识界对其研究的兴趣。爱因斯坦说过:/ 我们所经历的最美好的事情就是神奇, 它把我们推往真理的发源地, 那些不懂得这个道理, 不再具有好奇心, 不再感受神奇的人, 就如同已经死了, 就如同一截熄灭的蜡烛0。

(Mario Livio 著)