

# 混沌运动的数值特征

张 雄 飞

(海军工程大学兵器系统工程系 武汉 430033)

混沌,被誉为继相对论和量子力学之后的本世纪最重要的科学发现之一,它揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性,加深了人们对客观世界的认识。混沌理论及应用是一个具有广阔前景的前沿课题和学术热点,并逐渐成为一门新兴的产业,显示出巨大的经济效益和优越性。因此,研究混沌运动有着重大的理论和现实意义。

## 一、计算机是研究混沌运动的有力工具

因为混沌运动十分复杂,在研究和模拟混沌运动的过程中,不但要进行大量的数值计算,而且要将计算结果直观地展示出来以便观察混沌现象,完成这一任务非计算机不可。自从洛伦茨(Lorenz)利用计算机发现了第一个混沌吸引子以后,30多年来正是有赖于计算机技术的发展,促使混沌的研究取得迅速的发展。

另一方面,混沌运动是确定性系统中出现的一种貌似随机的现象,走向混沌有其独特的过程,只有展示出它的演化过程,才能很好地了解混沌运动。也就是说,混沌是一门关于过程、演化的科学而不是一门关于状态、存在的科学,因此只有利用计算机才能将混沌的动态过程和演化的方式真正地体现出来。

基于上述原因,本文根据数值模拟的思想,用计算机模拟混沌运动的特点和规律。在模拟过程中,可以改变方程或方程组的初始条件、步长及其他参数,从不同的角度展示混沌运动。本文所有算法和图形均可用VB语言实现。

## 二、混沌的基本特征

混沌至今仍无公认严格定义,它的含义主要体现在以下几个基本特征:

(1) 非周期性。混沌是非线性动态系统的一种可能定态,相空间轨道不是单调变化的,也不是周期性的,而是非周期性地曲折起伏变化的。把系统的非单调行为判定为要么瞬态运动、要么周期运动的传统观点是错误的。

(2) 整体的稳定中蕴含着局部的不稳定。混沌运动存在混沌吸引子,混沌吸引子对外部轨道有吸引力,进入吸引子就不可能再走出,因而整体是稳定

的。但吸引子内部的不同轨道相互排斥,极不稳定。

(3) 确定性随机性。混沌是在确定性的动力学系统中出现的,其演化方程和方程中的参数都是确定的,没有概率因素的存在。另一方面,混沌系统的轨道一旦进入混沌吸引子,其不规则性原则上与随机运动无法区分。但这种随机形式是确定性系统自身内部非线性因素产生的,与外部条件无关。

(4) 长期行为不可预测性。由于对初始条件敏感,混沌系统的长期行为同随机运动一样无法预测。但不能简单地宣布混沌运动不可预见。因为混沌系统的演化方程式是确定的,混沌吸引子在相空间的位置是确定的,短期行为可以预测;吸引子上的运动服从某种概率规律,具有统计意义上的可预见性。混沌的发现在某些方面又增强了人的预见能力。

(5) 无序中蕴含着十分复杂的有序。从混沌的相空间任意取出一部分放大看,仍像整体那样极不规则、具有无穷精细结构和某种自相似性。

## 三、混沌特征的计算机模拟

### 1. 通向混沌最典型的途径:倍周期分岔

由一个确定性系统走向混沌的一种最典型途径是倍周期分岔。这里引入最典型的混沌数学模型逻辑斯蒂(Logistic)方程来说明这个问题:

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$$

其中初值  $x_0$  的取值范围为  $(0, 1)$ ,  $\lambda$  的取值范围为  $[1, 4]$ 。在方程的演化过程中,将  $\lambda$  作为横坐标,并将其由小到大逐渐增大就可以展示倍周期分叉走向混沌的过程(如图1所示)。

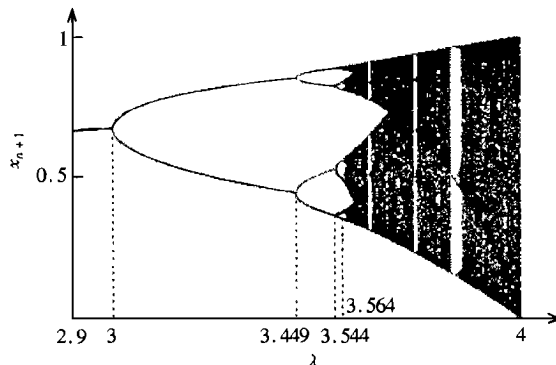


图1 逻辑斯蒂方程的混沌展示图

从图 1 中可以看出,当  $\mu < 3$  时,系统还处于稳定的 1 周期。 $\mu = 3$  时开始 2 分岔,得到稳定的 2 周期,即对应一个  $\mu$  的值,可以得到两个迭代值; $\mu = 3.449$  时,得到稳定的周期 4; $\mu = 3.544$  时,得到稳定的周期 8;随着  $\mu$  的逐渐增大,系统按照  $2^n$  进行倍周期分岔;当  $\mu = 4$  时,系统完全进入混沌状态。

在迭代过程中,倍周期出现间隔越来越短,即相邻两个分岔点所对应的  $\mu$  的间距越来越小,当分岔次数  $n$  时,分岔点所对应的  $\mu$  的间距比存在一极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.669201609 \dots\dots$$

式中  $\mu_{n-1}$ 、 $\mu_n$ 、 $\mu_{n+1}$  为每次分岔时对应的  $\mu$  的值。 $\lambda$  的极限值表示分岔序列的收敛速率(即的减小量),它与迭代系统  $f(x)$  的形式无关,是一个普适常数,叫费根鲍姆(Feigenbaum)数,它反映了混沌的内在有序性。

### 2. 混沌最基本的特征:对初值的敏感性

由于混沌的内在随机性,初始条件的微小差别会随时间的演化呈指数规律增长,最终使得它的行为无法预知,呈现出一种貌似随机的状态,这就是“蝴蝶效应”,即在上海的蝴蝶煽动一下翅膀——相当于轻微地改变了当日的空气流——结果可能是数日后在太平洋彼岸引起一场料想不到的大风暴。

表 1 混沌对初值的敏感性

$n$	$X_{01} = 0.100000001$	$X_{02} = 0.100000001$
1	0.3600000032	0.36000000032
2	0.921600003584	0.9216000003584
3	0.28901374791188	0.28901375879118
5	0.58542059128345	0.58542054398912
10	0.147835534839396	0.14783643876113
20	0.82135470798747	0.82014813308803
30	0.4602210797895	0.49519018521200
40	0.92273509100962	0.95533887315351
50	0.3101376092573	0.91665363828596
51	0.85580909912603	0.305598982812229
52	0.49359956553472	0.84883297806553

这里利用方程进行数值模拟来说明。当  $\mu$  为 4 时,由方程所确定的系统完全处于混沌状态,取两个相差极为微小的初值  $X_{01} = 0.100000001$ ,  $X_{02} = 0.100000001$ ,然后确定迭代次数进行迭代。迭代结果如表 1。从中可以看出,随着迭代次数的增加,迭代值呈现出一种随机状态,说明了对于混沌系统初值的微小差别将会导致系统未来的行为不可预测。

### 3. 无序中的有序:窗口

表面上看,混沌运动呈现出混乱无序的随机状

态,但这种随机状态是一种内在的随机状态,随机中蕴含着有序,如图 2 所示。

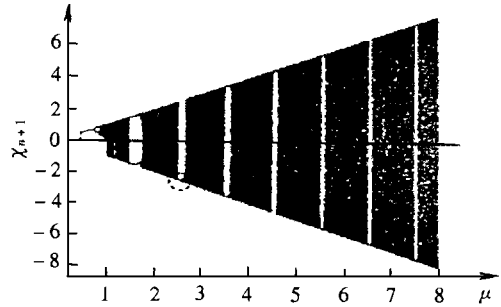


图 2  $x_{n+1} = \mu \sin(x_n)$  的混沌示意图

图 2 是用正弦模型  $x_{n+1} = \mu \sin(x_n)$  经过迭代得到的, $\mu$  的取值范围为  $[0.2, 8]$ ,步长为 0.001,初值  $x_0$  的值为 0.1,迭代次数为 20 次。从图上可以看出,在混沌区有许多“孤岛”存在,这些孤岛称为“窗口”。窗口的存在,表明混沌区中还有稳定的周期存在,这些稳定的周期并不是对应于某一

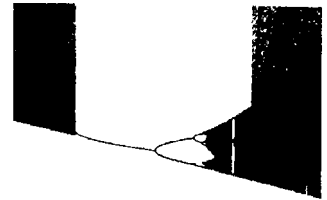


图 3 图 2 虚框部分放大图

点,而是存在于某一区域内。对其中的某一窗口进行局部放大,如图 3 所示。

图 3 是图 2 中  $\mu = 2.5$  时所对应窗口的局部放大,从中又可以看出倍周期走向混沌的过程和混沌区域,这与整体图十分相似,只不过尺度不同,混沌的这一特性称为自相似性。它又一次表明了混沌并不是真正的随机态,而是在随机状态中蕴含着有序。

### 4. 稳定中的不稳定:混沌吸引子

混沌吸引子(Chaotic attractor)具有复杂的拉伸、折叠和伸缩的结构,使得按指数规律发散的系统保持在有限的空间内。它是动力学系统整体稳定性和局部不稳定性共同作用的结果。由于整体的稳定性,使得一切位于吸引子之外的运动都向吸引子靠拢,运动轨道收缩到吸引子上;而局部的不稳定,使得一切到达吸引子内部的运动轨道相互排斥,在某些方向上发散,成为不稳定的因素。微小的扰动对混沌吸引子来说都是稳定的,终将达到吸引子上。但是,在混沌吸引子内部,其对初始条件非常敏感,即进入混沌吸引子的位置稍有差别,这一差别会以指数形式增长,最终导致混沌轨道的截然不同。混沌吸引子有以下特性:具有分形的性质,是一个分形集;具有无穷嵌套的自相似性结构;非整数维,它是

对我们所熟知的整数维空间中维数概念的扩展。

图4所示的洛伦茨吸引子的维数是2.06,它是利用下面常微分方程组迭代得到的:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= 28x - y \\ \dot{z} &= xy - (8/3)z \end{aligned}$$

这里初值  $x = 10, y = 12, z = 50$

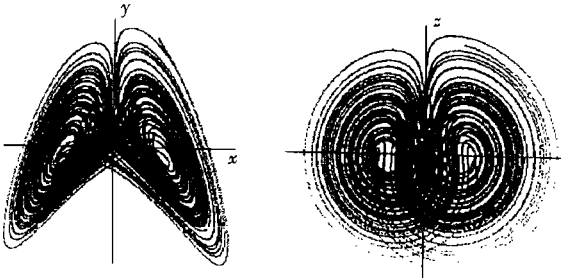


图4 洛伦茨吸引子

### 5. 混沌的状态判据:李雅普诺夫指数

李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数是系统是否处于混沌状态的一个定量判据。由于混沌运动对初始条件极为敏感,对于初始时刻靠得非常近的两条轨道,它们之间的距离将随着时间的增长按指数规律增长,这一增长率可以通过计算李雅普诺夫指数的方法定量地进行描述。

对于一维系统  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,李雅普诺夫指数可以定义为:

$$\lambda = \log_2 L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 |f'(x_i)|$$

根据李雅普诺夫指数的定义和数值模拟的思想,我们引入  $x_{n+1} = \mu \sin(x_n)$  混沌模型,取初值  $x_0$  为 0.9,  $\mu$  从 0.3 到 8,步长为 0.001,图5是所得到的模拟结果。

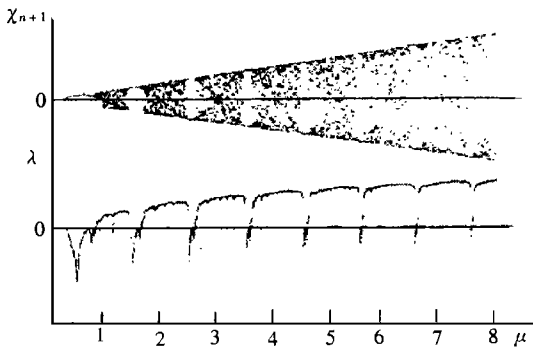


图5 正弦模型  $x_{n+1} = \mu \sin(x_n)$  的混沌图(上)及李雅普诺夫指数图(下)

由图5上面部分和下面部分的对应关系可以看

出,混沌区域的李雅普诺夫指数 大于零,且 的值越大,系统越不稳定;对应于窗口区域,即稳定周期区域的李雅普诺夫指数 小于零, 的值越小,系统越稳定;对应于分叉点的地方,李雅普诺夫指数等于零。

### 四、一个应用广泛的领域:混沌同步

对初值的敏感性使人们一度认为混沌的同步几乎不可能,直到1990年卡罗尔(Carroll)首次实现了两个系统的混沌同步,其基本思想为:先设计一个能产生混沌现象的非线性系统作为驱动系统,且其可分为一个稳定的子系统和一个不稳定的子系统。然后复制一个与稳定的子系统完全相同的子系统作为响应系统。用驱动系统中不稳定的子系统去驱动响应系统,这样响应系统在驱动系统的驱动下工作就可以达到与驱动系统同步,而响应系统与驱动系统之间毫不相关。整个混沌同步系统的结构方框如图6所示。

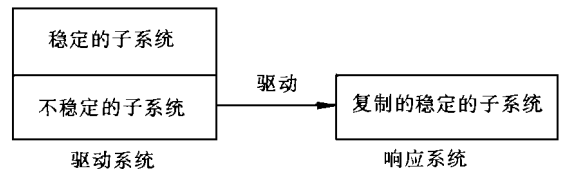


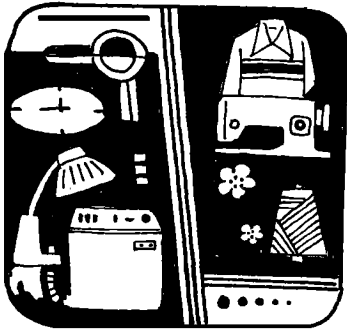
图6 混沌同步系统的结构方框

根据上述混沌同步的实验思想,我们引入罗斯勒尔(O. Rossler)模型构建了混沌同步的数学模型,方程组 为驱动系统,方程组 为响应系统,取  $y$  为驱动变量。

$$\begin{cases} \dot{x} = - (x + y + z) \\ \dot{y} = - (-x - y + 0.02y) \\ \dot{z} = - [-g(x) + z] \\ g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ \mu(x - 3) & x > 3 \end{cases} \end{cases}$$

式中  $\tau$  为时间常数,其值为 10000,  $\tau = 0.05$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $\tau = 1.0$ ,  $\tau = 0.133$ ,  $\mu = 15$  根据这一数学模型,我们采用欧拉算法作  $y$  与  $y$  的相图可得到图7。

从图7中可以看出,两系统在开始时还未能同步,随着时间的推移,响应系统在驱动变量  $y$  的驱动下逐步与驱动系统同步。如果不用驱动变量驱动



# 静电及其应用

顾 勇

(南通师院物理系 江苏 226007)

建国以来,随着国民经济的迅速发展,我国静电科学研究已取得了很大的进展,并广泛应用于多个领域。如何进一步防止静电的危害、利用静电造福于人类社会对于我们具有十分重要的意义。

## 一、静电现象与研究

人们通常将运动的电荷或导体中的电流叫做动电,而把相对静止的电荷或者物体上处于相对平衡的电荷称做静电。静电现象在自然界,在我们的日常生活中广泛地存在着,如:当你拿起梳子梳头时,你会听到噼啪的声响;在炎热的夏季阴雨天气里,你会看到耀眼的闪电;如果你用一块绸子摩擦一根玻璃棒时,你会发现玻璃棒能够吸引许多小纸屑……这些奇妙的现象,就是静电。

早在公元前 7 世纪,即我国的周朝时期,古希腊有一位名叫塔利斯 (Thelias) 的哲学家在海滩上偶然发现了一种美丽的石块,它能吸引麦秆的小碎渣和一些轻小的羽毛。他感到非常奇怪,又取了些线丝、绒毛,也用这块石头去吸,结果也被吸引了起来。这种透明的褐黄色石头就是现在所谓的“琥珀”。塔利斯当时解释不了这个有趣的现象,他把这个现象记载了下来,让后人揭开这个“琥珀之谜”。其实,这就

是现在我们所说的摩擦生电现象。

这种摩擦生电现象早在我国东汉时期,著名学者王充就在他的一本叫做《论衡》的书中记载了“顿牟掇芥”,“顿牟”就是琥珀,“掇”就是拾取的意思,而“芥”则是轻小的物体。王充的记载与塔利斯的一样都不能解释这种奇妙现象。可惜的是,这个极为重要的发现并没有引起人们的注意,被放置了 2000 多年。直到 17 世纪,英国物理学家吉尔伯特 (William Gilbert) 才又重新研究这个“琥珀之谜”。经研究他发现物体被摩擦之后能吸引轻小物体的现象,并不是琥珀所独有,像玻璃、火漆、胶木、宝石、水晶等等。虽然吉尔伯特也没有解释这种奇妙的“带电现象”,但却吸引了很多科学家们的兴趣。

1947 年美国物理学家富兰克林 (B. Franklin) 经过许多实验后正式宣布两种电荷的存在,即正电荷和负电荷,他认为摩擦后的玻璃棒带正电,而树脂棒带负电。1745 年,莱顿大学教授马森布罗克 (P. Musschenbroek) 发明了莱顿瓶,它能收集电荷,是电容器的一种原始形式。1775 年,意大利物理学家伏打 (A. Volta) 发明了静电感应起电盘,他利用感应起电盘能使导体产生电压很高的静电。科学家法拉第

而让驱动系统与响应系统各自自由振荡,就可得到图 8,从中可以看出在没有驱动变量  $y$  的驱动时,两个系统无法达到同步。

混沌同步应用十分广泛,其中最主要的就是用于网络和通信

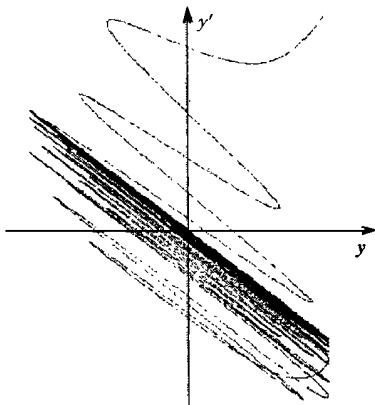


图 7 混沌同步模拟图

保密,已经开发出了软、硬件产品。在发送端用混沌信号对有用信号进行调制,由于有用信号不改变混沌信号的“混沌”特性,所以接收到的信号是混沌的,这就实现了信息加密。当发送和接收系统是同步的,接受端就可以恢复与发送端同步的混沌信号,解调出信息。

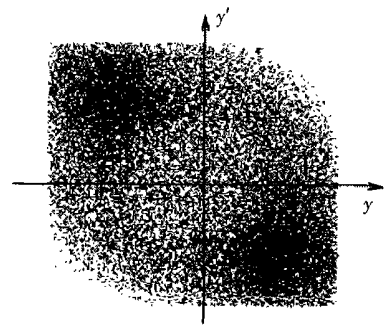


图 8 两个系统自由振荡时的混沌图