浅 谈 分 形

周 胜
(哈尔滨师范大学物理系 黑龙江 150080)

复杂的生命现象,喧闹的都市生活,蜿蜒曲折的海岸线,坑坑洼洼的地面等等,都表现出了客观世界极为丰富的现象。但基于古典的欧几里得几何学的各门自然科学总是把研究对象想象成一个个规则的形体,而我们生活的世界实际上却是不规则和支离破碎的,与欧几里得几何图形相比,拥有完全不同层次的复杂性。分形几何则提供了一种描述这种不规则复杂现象中的秩序和结构的新方法。

通俗地说,分形几何就是研究无限复杂但具有一定意义下的自相似图形和结构的几何学。例如:一颗参天大树与它自身上的树枝及树枝上的枝桠,在形状上没有什么大的区别,动物也不例外,一头牛身体中的一个细胞中的基因记录着这头牛的全部生长信息,还有高山的表面,无论怎样放大局部都是粗糙不平的,这类例子在我们身边到处可见。而分形几何提出了世界的本质,是真正的描述大自然的几何学。

一、什么是分形

“分形”(fractal)这个名词是由 IBM 公司研究中心物理部研究员暨哈佛大学数学系教授曼德勃罗(Benoit B. mandelbrot)在 1975 年首次提出,其原意是“不规则的,分数的,支离破碎的”物体,这个名词是参考了拉丁文 fractus(弄碎的)后造出来的。1977 年,他出版了第一本著作《分形:形态,偶然性和维数》,标志着分形理论正式诞生。5 年后他出版了著名的专著《自然界的分形几何学》,至此分形理论初步形成。由于他对科学的杰出贡献,他荣获了 1985 年的 Barnard 奖。

目前。分形是非线性科学中的一个前沿课题,不同文献中分形被赋予不同的名称。如“分数维数集合”“豪斯道夫测度集合”“S 集合”“非规整集合”以及“具有精细结构集合”。

一般地可以把分形看做大小碎片聚集的状态,是没有特征长度的图形和构造以及现象的总称。也可以认为组成部分以某种方式与整体相似的形体叫分形。这种定义突出了分形的自相似性,反映了自然界中广泛存在的一类物质的基本属性;局部与局部,局部与整体在形态、功能、信息、时间和空间等方面具有统计意义的自相似性。

分形具有下面列出的典型的几何性质:

(1) 分形集都有任意小尺度下的比例细节或者它具有精细结构。

(2) 分形集不能用传统的几何语言来描述,它既不是满足某些条件的点的轨迹,也不是某些简单方程的解集。

(3) 分形集具有某种自相似性的形式,可能是近似的自相似性或者统计的自相似性。

(4) “分形维数”(以某种方式定义)一般大于它的拓扑维数。

(5) 在大多数令人感兴趣的情形下,分形集可由非常简单的方法定义,可能以变换的迭代产生。

对于各种不同的分形,有的可能同时具有上述的全部性质,有的可能只有(1)—(5)中的大部分性质,而对某个性质有例外,但这并不影响我们把这个集合称为分形。应当指出,自然界各门应用科学中涉及的分形绝大部分都是近似的。当尺度缩小到分子的尺度分形也就消失了。严格的分形只存在于理论研究中。

二、分形基本概念及性质

分形维数为度量两个分形集的“不规则”的程度提供了一种客观的工具。分形维数的重要性在于它们能够用数据定义并且能通过实验手段近似的计算。分形维数已突破一般拓扑的整数维的界限,引入了分数维。这也是分形几何刚出现时最令人困惑的一点。分形维数有不同的定义方式,其中最易理解且与分形维数有密切关系的是相似维数(Similarity Dimension),一般的如果某图形是把全体缩小为 $1/a$ 的 a^D 个相似图形构成的,那么此指数被称为相似维数。提出相似维数是把经验维数扩大为非整数的划时代的进展,但是按照其定义它的适用范围就非常有限,只有对具有严格定义的自相似的有规分形才能应用这个维数。

豪斯道夫(Hausdorff)维数定义适用于包括随机图形在内的任意图形。对于一个有确定维数的几何体。若用与它相同维数的“尺”去量,则可有一确定的数值 N;若用低于它的维数的“尺”去量,则结果是无穷大;若用高于它的维数的“尺”去量,则结果是零。其数学表达式为 $N(r) \sim r^{-D}$,对上式两边取自然对数并进行简单运算后便可得到下式:

$$D = \ln N(r) / \ln(1/r)$$

式中的 D 就称为豪斯道夫维数, 它可以是整数, 也可以是分数。某些文献将 D 称为豪斯道夫—贝塞科维奇维数。人们常把豪斯道夫维数是分数的物体称为分形。把此时 D 称为该分形的分形维数。严格地说, 在确定一个物体是否分形时, 除了看其豪斯道夫维数值以外, 还必须看其是否具有自相似性和标度不变性。

一个系统的自相似性, 是指某种结构或过程的特征, 从不同的空间尺度或时间尺度来看都是相似的或者某系统结构的局域性质或局域结构与整体类似。另外, 在整体与整体之间或部分与部分之间也会存在自相似性。一般情况下自相似性有比较复杂的表现形式, 而不是局域放大一定倍数以后简单地和整体完全重合。但是, 表征自相似性系统或结构的定量性质如分形维数, 并不会因为放大或缩小等操作而变化, 所改变的只是其外部的表现形式。

标度不变性, 是指分形上任选一局部区域, 对它进行放大, 这时得到的放大图又会显示出原图的形态特性。通俗一点说, 如果用放大镜来观察一个分形, 不管放大倍数如何变化, 看到的情形都是一样的, 以观察到的图像无法判断所用的放大镜的倍数。

三、典型的分形集

1. 康托尔集

康托尔(G. Cantor) 在 1883 年构造了如下的一类集合。选取一个欧氏长度为 L_0 的直线段, 将该线段 3 等分, 去掉中间的一段留下两段。将剩下的两段分别再 3 等分, 各去掉中间的一段, 剩下 4 段, 将这样的操作继续下去直至无穷, 便可得到一个离散的点集。点数趋于无穷多, 而欧氏长度趋于零。经过无限次操作达到极限时所得到的离散点集称为康托尔集, 见图 1。

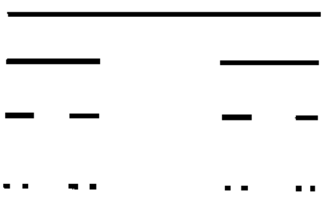

图 1　康托尔(Cantor) 集

2. 科赫曲线

瑞典数学家科赫(Koch) 在 1904 年提出了如下的一种生成曲线的方法, 把一条直线等分 3 段间中间的一段用夹角 60°的两条等长折线来代替, 形成一个生成元, 然后再把每一个直线段用生成元进行代换, 经过无穷多次迭代后就呈现出一条有无穷多弯曲的科赫曲线, 见图 2。

3. 谢尔宾斯基集

谢尔宾斯基缕垫(sierpinski gasket): 将一个等边三角形四等分, 得到 4 个小等边三角形, 去掉中间的一个, 保留它的 3 条边, 将剩下的 3 个小等边三角形重复以上的操作直至无穷可得到谢尔宾斯基缕垫, 见图 3。

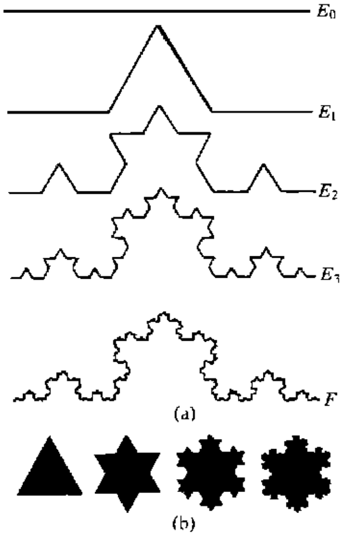

图 2　(a) 三次科赫(Koch) 曲线;
(b) 由科赫(Koch) 曲线构成的科赫雪花

谢尔宾斯基地毯: 将一个正方形 9 等分, 去掉中间的一个, 保留 4 条边, 将剩下的 8 个小正方形进行以上的操作, 重复操作直至无穷得到的, 见图 4。

谢尔宾斯基海绵: 对一个正六面体的 6 个面均进行 9 等分, 这等价于将正六面体进行 27 等分, 而后去掉体心与面心处 7 个小立方体, 剩下 20 个小立方体, 并保留它们的表面, 将上述操作重复下去直至无穷得到的, 见图 5。

图 3　谢尔宾斯基缕垫

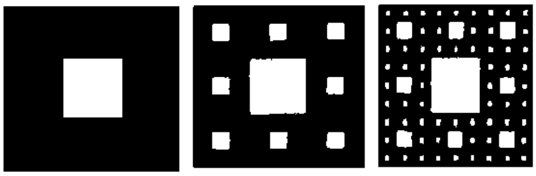

图 4　谢尔宾斯基地毯

谢尔宾斯基集的共同特征是:

1. 它们都是经典几何无法描述的图形, 在谢尔宾斯基缕垫中, 它的面积趋于零, 而其周长趋于无穷大, 在谢尔宾斯基海绵中, 它的体积趋于零, 而其表面积趋于无穷大。因此它们常被称为病态的几何图形, 是一种“只有皮没有肉”的几何集合。

2. 它们都具有无穷多个相似的内部结构。任何一个分割后的图形适当的放大后都是原来图形的翻版。

4. 朱丽亚集

即是由法国数学家 Gaston Julia (1918 年) 和 Pierre Faton (1919 年) 在发展了复变函数迭代的基础

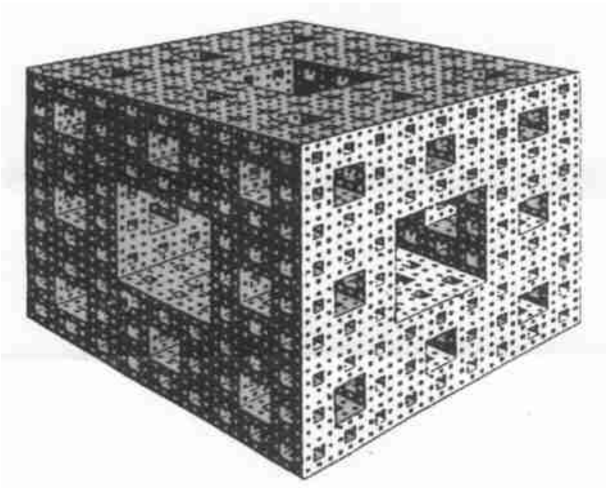

图 5　谢尔宾斯基海绵

理论后获得的。*Julia* 研究 $Z_{k+1}= Z_k^2+c$ 这一变换在复平面中生成的一系列令人眼花缭乱的变化。当时没有计算机, 他依靠高度的想象力和百折不挠的探索精神获得了如此巨大的智力成就。Faton 的工作可以被包括在 Julia 集中, 所以 Faton 集是 Julia 集的余集。但在当时两人的工作并不为世人所重视。

Julia 集是由一个复变函数 f 迭代生成的。在复平面 C 上像 $f(z)= z^2+ c$ 这样一个带有常数 c 的简单函数, 把 c 值固定, 而 z 则作为原始点在进行变化, 按这种规则可以得到不计其数的 Julia 集, 只要任选一个 c 值就能产生一个与众不同的 Julia 集, 见图 6。

5. 曼德勃罗集

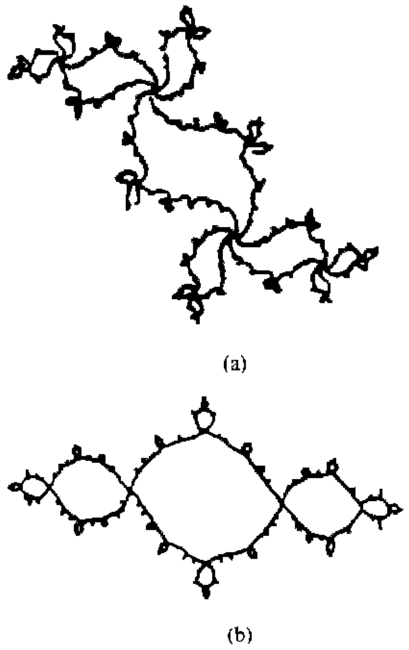

图 6　二次复变函数 $f(z)= z^2+ c$ 的一组 Julia 集

(a) $c= -0.2+ 0.75i$　(b) $c= -1+ 0.05i$

曼德勃罗(mandelbrot)集也是对 $z \to z^2+ c$ 这一迭代在复平面中所生成的复杂图形。在进行 $z \to z^2+ c$ 这一迭代时, 将 z 的初始值用原定为零, 对 c 却另选一个不为零的数。使 c 在复平面的某一部分上有规律的变化。用不同的 c 值反复进行迭代。那些即使进行了无数次迭代运算后, $z^2+ c$ 的值也是有限的复数 c 的集合, 就构成了形状极其复杂的曼德勃罗集。

曼德勃罗集的明显特征是一个主要的心形图与一系列圆盘形的"芽苞"突起连接在一起, 每一个芽苞又被更细小的芽苞环绕, 以此类推。还有精细的"发状"分枝从芽苞向外长出, 这些细发在它们的每一段上都带有与整个曼德勃罗集相似的微型样本, 见图 7。

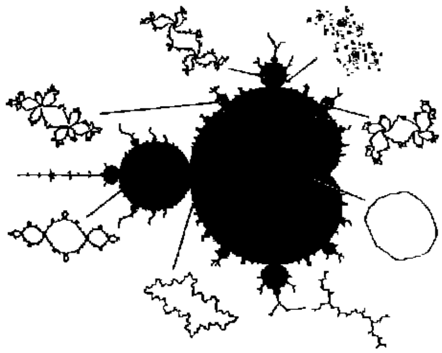

图 7　对应于 mandelbrot 集中个种点 c 的 Julia 集

四、物理中的分形

湍流　湍流是气体或液体流动的一种形式。在湍流中流体中的每一点的流速与方向都不断的发生变化, 风和河水的流动看似平稳, 其实它们是湍流, 河水中出现大大小小的漩涡, 二、三级风也会出现小旋风。自然界中大部分流体的流动为湍流。如血管中的血液流动, 大气和海水的流动, 熔岩的流动。

电击穿　电击穿的类型很多, 最常见的是大气中的闪电。电击穿也可发生于其他绝缘体中如玻璃、云母、木材以及多种高聚物中, 乃至气体与液体中。虽然材料不同但发生电击穿时所形成的图样却很相似。电击穿是一种无规则的生长过程。近年来认识到电击穿所产生的形状为分形, 它的分形维数约为 1.7。

无规游动　设想一个点从某一点出发开始运动, 在每单位时间内, 它移动的距离与移动的方向都是无规混乱的, 这就是无规游动。著名的布朗运动就是无规游动的典型例子。当观测一个微粒运动的时间间隔趋于零时就是理想的布朗运动。理想的布朗运动的轨迹会填满一个平面。它的分形维数数字论证等于 2。