轻绳、轻杆、轻弹簧作用下的圆周运动

刘立毅

轻绳、轻杆、轻弹簧的"轻"就是质量可忽略,重力不计。三者中各处的受力相同,均为理想物理模型。三种模型又有诸多不同——通常认为轻绳不可伸长但可松弛,轻杆长度保持不变,二者对物体的弹力都能发生突变。轻弹簧在弹性限度内,其长度随受力的变化而变化,但对物体的作用力不能发生突变。下面通过例题分类说明轻绳、轻杆、轻弹簧作用下的圆周运动。

轻绳对物体只能产生沿绳收缩方向的拉力

例 1 一小球(视为质点)用长为 $4L$ 的轻质细线悬挂于 O 点,将细线拉直并处于水平状态,由静止释放。当线转到竖直位置时绕到一个如图 1 放置的边长为 L 的正方体木块上,为使小球恰好能通过最高点而绕在木块上(绳和木块作用过程无能量损失)。求木块的上边缘到 O 点的距离 h 至少应为多大?

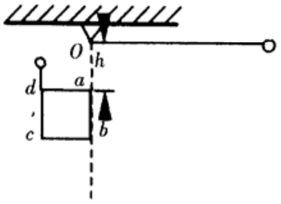

图 1

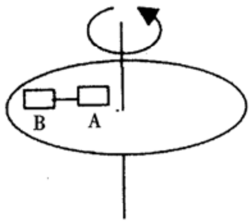

图 2

解析 小球释放后以 O 为圆心做圆周运动,当线运动到竖直位置时将绕到木块上,以 b 为圆心做圆周运动。当线运动到水平位置后,再以 C 为圆心做圆周运动,小球恰好通过最高点时,其半径为 $r=4L-h-2L=2L-h$。

小球恰好通过最高点时,仅受重力作用,由牛顿第二定律得 $mg=mV^2/r$。

选 C 为参考面,小球从静止释放到运动到最高点的过程中,受重力和绳的弹力作用,只有重力做功,由机械能守恒定律得 $mg(h+L)=mv^2/2+mgr$。

解以上各式得 $h=0.8L$。

例 2 如图 2 所示,在匀速转动的水平圆盘上,沿半径放着两个质量均为 m 的小物体 A 和 B (视为质点),它们到转轴的距离分别为 $r_A=20$cm,$r_B=30$cm,A、B 与盘面的最大静摩擦力均为重力的 0.4 倍,试求:

(1)当细线上开始出现张力时,圆盘的角速度 ω_0。

面出来时,这时光线也会产生折射,但是这种折射最小偏向角不是 22°而是 46°;二是光线从六角柱体侧面进底面出,会出现 46°的晕,因此人们看到的晕是 46°的大晕圈。

在闽南地区,月晕比日晕更常见。

《淮南子》中写道:"尧时十日并出,草木皆枯,尧命后羿仰射十日其九"。其实,"十日"不是神话,是一种自然界的光现象,是天上出现多个晕,好象出现了多个太阳。这只不过是古人对自然界幼稚的解释,或是幻想和想像的产物罢了。

天上出现多个晕的奇观在当代也有,但是比较罕见。据报道:1985 年 1 月 3 日,在黑龙江省绥化市上空曾出现过五个太阳当空的奇观。这一天上午 11 时许,太阳光盘呈火红颜色,边缘呈黄金色,光辉耀眼。太阳周围有一个时隐时现的多色的光环。从太阳两侧向北扩散,各有两个闪耀着彩色光辉的假太阳。有一白色的大半圆光环把四个假太阳贯通起来,犹如一条项链上穿着五颗宝珠。天空还有两道凸面向着太阳的彩虹,五彩缤纷,情景壮观。1986 年 12 月 19 日上午 9 时 1 刻到 10 时半,西安地区上空东南方出现了五个亮斑,好像多了五个太阳。

日晕的多少、明暗、大小随着高空冰晶的分布情况而异。

长期以来,劳动人民在生产斗争、生活实践中,对日晕、月晕的天气现象总结了许多谚语,如:日晕风,月晕雨;月晕而风;月晕没门,半夜雨沉沉;月亮长毛,有雨明朝等。可见,晕与天气系统相联系,它的出现是天气将要变化的预兆。当我们明白了晕的光学气象原理之后,再运用劳动人民丰富的看天经验,领会天气谚语的含义,同时在实践运用中加以总结提高,方能收到较好的效果。当然,预测天气变化情况,还要通过云的发展情况和其他天气要素来综合分析。

(福建省同安一中 361100)

(2)A 开始滑动时,圆盘的角速度 ω。

解析 当 ω 较小时,物体 A、B 受到静摩擦力提供向心力,绳中无弹力。ω 增大时,由 $F_{f静}=m\omega^2 r$ 可知,它们受到的静摩擦力也增大。由题知 $r_B>r_A$,所以 B 受到的静摩擦力先达到最大值。ω 再增大,B 开始受到绳的拉力。由 $F_{fm}=m\omega^2 r_B$ 得

$$\omega_0=\sqrt{\frac{F_{fm}}{mr_B}}=\sqrt{\frac{0.4mg}{mr_B}}=\frac{2}{3}\sqrt{30}\ \text{rad/s}$$

当 ω 达到 ω_0 后,ω 再增大,B 增加的向心力靠增加的绳的拉力来提供,A 增大的向心力靠增加的静摩擦力来提供。当 A 受到的静摩擦力也增加到最大值时,ω 再增加,就不能维持匀速圆周运动了,A、B 就在圆盘上滑动。设此时角速度为 ω,绳中张力为 F_T,此时 A 受力如图 3 所示,由牛顿第二定律得 $F_{fm}-F_T=m\omega^2 r_A$,此时 B 受力如图 4 所示,由牛顿第二定律得 $F_{fm}+F_T=m\omega^2 r_B$,由以上两式解得

$$\omega=\sqrt{\frac{2F_{fm}}{m(r_A+r_B)}}=4\text{rad/s}$$

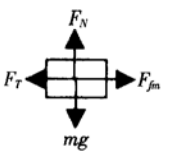

图 3

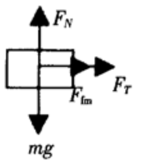

图 4

轻杆对物体既可以有拉力也可以有支持力(或压力)

例 3 如图 5 所示,质量为 $m=1$kg 的小球系在长为 $L=0.5$m 的轻杆上,可绕 O 点在竖直平面内做圆周运动。当小球在最低点 A 获得 $v_1=4$m/s 和 $v_2=6$m/s 初速度时,求小球运动到最高点 B 时,轻杆对小球作用力的大小和方向。(取 $g=10$m/s)。

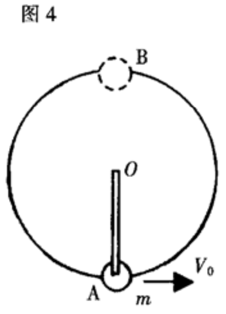

图 5

解析 当小球运动到最高点 B 时,若此时小球恰不受杆的作用,设此时小球速度为 v_0。设向下为正方向,由牛顿第二定律得 $mg=mv_0^2/L$,所以 $v_0=\sqrt{gL}$。设小球在 A 点具有初速度 v_A 时,到达点 B 的速度恰为 v_0,取小球、轻杆为系统,由 A 至 B 过程机械能守恒,可得 $mv_A^2/2=mv_0^2/2+mg2L$,所以 $v_A=\sqrt{v_0^2+4gL}=\sqrt{5gL}=5$m/s。因为 $v_1<v_A$,所以小球在 B 点时杆对小球的作用力为向上的推力 F_1,速度为 v_{B1},受力如图 6 所示。设向下为正方向,由牛顿第二定律得 $mg-F_1=mv_{B1}^2/L$。小球、杆系统由 A 至 B 过程,由机械能守恒定律得 $mv_1^2/2=mv_{B1}^2/2+mg2L$,解以上各式并代入数据得 $F_1=18$N,方向竖直向上。因为 $v_2>v_A$,所以小球在 B 点时杆对它的作用力为向下的拉力 F_2,速度为 v_{B2},受力如图 7 所示。设向下为正方向,由牛顿第二定律得 $mg+F_2=mv_{B2}^2/L$。同理,系统由 A 至 B 机械能守恒,可得 $mv_2^2/2=mv_{B2}^2/2+mg^2L$。

图 6

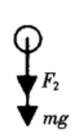

图 7

解得 $F_2=22$N,方向竖直向下。

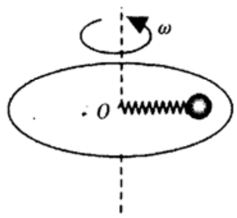

图 8

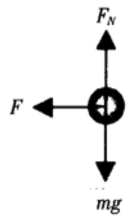

图 9

轻弹簧对物体既可以有拉力,也可以有支持力,其长度随受力的变化而变化

例 4 有原长为 L_0 的轻弹簧,劲度系数为 k,一端系一质量为 m 的物体,另一端固定在转盘上的 O 点,如图 8 所示。物块随转盘一起以角速度 ω 转动,物块与转盘间的最大静摩擦力为 F_{fm},求物块在转盘上的位置范围。

解析 由题意知,物块与转盘间有最大静摩擦力 F_{fm}。当物块转动半径最小时,设为 r_1,此时弹簧被压缩的量为 L_0-r_1v。对物块而言,受有指向圆心的最大摩擦力 F_{fm} 及弹簧的弹力 $F=k(L_0-r_1)$,受力如图 9 所示,由牛顿第二定律得 $F_{fm}-k(L_0-r_1)=mr_1\omega^2$,解得

$$r_1=\frac{F_{fm}-kL_0}{m\omega^2-k}$$

当物块转动半径最大时,设为 r_2,此时弹簧的伸长量为 (r_2-L)。对物块而言,受有指向圆心的弹簧的弹力 $F=k(r_2-L)$ 及背离圆心的最大静摩擦力 F_{fm},由牛顿第二定律得 $k(r_2-L)-F_{fm}=mr_2\omega^2$,解得

$$r_2=\frac{F_{fm}+kL_0}{k-m\omega^2}$$

所以物块在转盘上的位置范围为

$$\frac{F_{fm}-kL_0}{m\omega^2-k}\leqslant r\leqslant\frac{F_{fm}+kL_0}{k-m\omega^2}$$

(山东省德州市第一中学 253017)