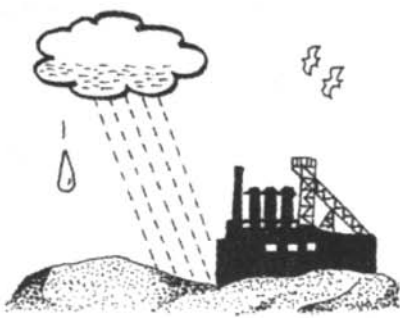


雨滴的终极速度与沙里淘金

司德平

2003 年普通高等学校招生全国统一考试物理新课程卷第 15 题是求雨滴在无风情况下终极速度的计算题,该题不仅物理情景新颖,而且还给出了中学阶段没有学习的新公式(球形雨滴缓慢匀速平动时所受到的阻力 $f=krv$),有利于考查考生提取、运用有用信息的分析综合能力和知识的迁移能力。本文就谈一谈雨滴的终极速度及其应用——沙里淘金。



一、物体在粘滞流体中运动受到的阻力

粘滞阻力 物体在粘滞性流体中运动时,由于物体表面附着一层流体,这层流体被物体带走,从而造成物体表面附近的流体有一定的速度梯度,流层之间有内摩擦力,因而物体也受到内摩擦阻力的作用,这种由流体的粘滞性直接引起的阻力叫做粘滞阻力。对于低速运动的物体所受流体的阻力主要是粘滞阻力。当较小的物体在粘滞系数较大的流体中缓慢运动时,作用于物体表面的摩擦阻力可认为就是粘滞阻力。1851 年,英国物理学家和数学家斯托克斯(G. G. Stokes)发现了描述球形物体在粘滞性流体中做缓慢匀速平动时所受粘滞阻力的斯托克斯公式 $f=6\pi\eta rv$ 。式中 r 为球体的半径, v 为球体的速度, η 为流体的粘滞系数。该式只有在雷诺(O. Reynolds)数比 1 小很多时才完全适用。

压差阻力 物体在流体中运动时,除了受到粘滞阻力以外,还受到压差阻力。当物体运动速度大到物体后面出现涡流时,压差阻力就必须予以考虑。当物体以较大的速度在流体中运动时,它前面的流体不能及时地绕到后面,使物体后面暂时出现了一个接近真空的区域。这个区域一出现,四周的流体便争先恐后地跑过来填补,形成了涡旋。涡旋的压强比物体前面的压强小,便形成了压差阻力。压差阻力虽然直接来自物体前后端的压强差,但造成压强差的涡旋却仍然是由流体的粘滞性所产生的。对于高速运动的物体所受流体的粘滞阻力主要是压差阻力。压差阻力与物体的形状有关,改变物体的形状可以减小压差阻力,例如将物体制成尾部尖细的流线型以缩小涡旋的范围,减小压差阻力。所以,飞机机身和

机翼、火箭、快速汽车、船身等都采用流线型。运动物体受流体阻力的大小一般由实验测定。运动物体速度较小时,所受的阻力正比于它的运动速度 v , 运动物体速度较大时所受的阻力正比于 v^2 甚至 v 的更高次幂。如果物体运动的速度超过声速,则在运动物体的前面产生激震波,此时阻力的大小正比于 v^3 。即运动物体的速度越大,阻力便与 v 的更高次幂成正比。

二、雨滴的终极速度

设想如果没有空气的阻力,雨滴自上万米的高空下落,那么雨滴落地时的速度约为

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.8\times 10^4}\text{ m/s}=4.4\times 10^2\text{ m/s}$$

这速度是一般子弹出枪膛时的速度,但事实上从来没有被雨滴击中而伤亡的。其实,雨滴落到地面时的速度远小于上述自由落体的速度。原因很简单,雨滴不是做自由落体运动。

设雨滴是半径为 r 的小水球。雨滴在下落过程中受 3 个力的作用:一是重力 G ,其大小为 $G=4/3\pi r^3\rho_{\text{水}}g$,方向竖直向下,二是空气的浮力 $F_{\text{浮}}=4/3\pi r^3\rho_{\text{空气}}g$,方向竖直向上。三是空气阻力,由实验测得空气阻力 f 与雨滴下落的速度 v 的关系为

$$f=3.1\times 10^{-4}rv+0.87r^2v^2$$

其中 r 和 v 均取国际单位制。空气阻力的方向竖直向上。所以由牛顿第二定律可得雨滴满足的动力学方程为

$$mg-F_{\text{浮}}-f=ma$$

$$\text{即 } \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{水}}g-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{空气}}g-3.1\times 10^{-4}rv-0.87r^2v^2=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{水}}a \quad (1)$$

(1)式中 a 是半径为 r 雨滴的在速度为 v 时的加速度。当雨滴自高空下落时,速度 v 由零逐渐增大,空气阻力随之逐渐增大,雨滴下落的加速度也随之逐渐减小,当雨滴的速度增大到一定值时,雨滴所受的合力为零,此时雨滴的加速度为零,于是从此雨滴匀速下落直到地面,这个速度就称为雨滴的终极速

度。下表是科学家测量的各种大小的雨滴的终极速度,与①式所得的结果基本吻合。由表中可见,雨滴半径越大,其终极速度也越大。

雨滴半径 /cm	终极速度 /cm·s ⁻¹	雨滴半径 /cm	终极速度 /cm·s ⁻¹	雨滴半径 /cm	终极速度 /cm·s ⁻¹
0.02	162	0.08	565	0.18	860
0.03	247	0.09	609	0.20	883
0.04	327	0.10	649	0.22	898
0.05	403	0.12	727	0.24	907
0.06	464	0.14	782	0.26	912
0.07	617	0.16	826	0.28	916

在 2003 年全国高考物理(新课程卷)第 15 题中,由于球形雨滴的体积很小($r=0.10\text{mm}$),因此忽略不计雨滴所受的浮力;并且题设由斯托克斯定律直接给出了雨滴在速度不大时所受的阻力 $f=krv$ ($k=6\pi\eta=3.4\times 10^{-4}\text{Ns/m}^2$),根据力的平衡条件求出的雨滴终极速度为 1.2m/s ,也与上表结果基本吻合。

三、沙里淘金

有的河边的沙粒中混杂有少量的黄金颗粒,为了把黄金颗粒与沙粒分开,常用的办法是用水冲走沙粒,留下黄金颗粒。水流为什么具有选择性?为什么不把黄金颗粒也和沙粒一起冲走呢?这个问题仍然可以用前面分析雨滴的终极速度的方法来分析。我们将沙粒和黄金颗粒都看作是球,将水流冲击沙粒和黄金颗粒看作是球在水中运动。下面分析沙粒和黄金颗粒在水中的运动有什么不同。

沙粒或黄金颗粒在流水中沉降时受到 3 个力的作用:一为重力,大小为 $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$ (式中 ρ 为沙或黄金的密度),方向竖直向下;二为水的浮力,大小为 $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$ (式中 ρ 为水的密度),方向竖直向上;三为水的阻力 $f=6\pi\eta rv$ (斯托克斯公式),方向竖直向上。在这 3 个力中,重力和浮力是恒力,其大小和方向在小球沉降过程中始终不变,而阻力是随着小球的运动速度增大而增大的。开始时小球静止($v=0$),因而阻力 $f=0$,在重力和浮力的作用下,小球加速下沉;随着小球速度 v 的增大,阻力 f 也增大,导致小球下沉的加速度逐渐减小,当小球所受的合外力为零时,小球匀速下沉,这时达到小球运动的终极速度 v_r 。据上面分析,小球的终极速度应满足的方程为

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho' g - 6\pi\eta rv_r = 0$$

解上式可得到小球(沙粒和黄金颗粒)的终极速度为

$$v_r = \frac{2r^2(\rho - \rho')g}{9\eta} \quad (2)$$

由(2)式可见,对于相同半径 r 的小球,其密度 ρ 越大,终极速度也就越大。黄金颗粒的密度比沙粒的密度大,所以黄金颗粒的终极速度也比沙粒大。如果沙粒和黄金颗粒同时开始沉降,自然是黄金颗粒先沉到底,所以黄金颗粒在下面,而沙粒在上面。这时再加以水平方向的水力冲洗,便将沙粒冲走了,留下了黄金颗粒,这就是沙里淘金的道理。其中由(2)式还可知,对于相同密度的小球, $v_r \propto r^2$,即球愈小,下落得愈慢,可见沙里淘金时黄金颗粒的体积为上小下大。

另外,由(2)式还可以看出,如果 v 、 r 、 ρ 和 ρ' 能测出,则可求出流体的粘滞系数 η 。反之,如果 v 、 η 、 ρ 和 ρ' 能测出,即可求出小球的半径 r 。由于流体粘滞系数可用很多方法测出,如粘度计、泊肃叶(J. L. M. Poiseuille)公式等,所以可用(2)式算出不易测准的小球半径。1911 年,美国物理学家密立根(R. A. Milligen)在证明电荷量子性的油滴实验中,就是利用此方法先求出油滴的半径,进而求出油滴的质量和电量。在气象学中,也常用(2)式求出雾中水滴在大气中下落的终极速度。在医学上,测定人体的血沉,有助于医生对人体健康状况的判断。若血液是由红细胞和血浆组成的悬浮液,当把血液放进竖直的血沉管内时,红细胞就会在血浆中匀速下沉,由(2)式可求出红细胞下沉的终极速度,医学上称之为血沉。反之,在血沉等量已知时,也可利用(2)式求出红细胞的密度。

(河南省平顶山市一中 467001)

科苑快讯

揭开生长在奥里萨巴火山
岩坡上松树的秘密

据俄通社-塔斯社墨西哥城报道,墨西哥和美国科学家试图弄明白生长在墨西哥最高的奥里萨巴火山岩坡上松树特殊生命力的原因,他们希望这种已适应海拔 4200 米特殊生长能力的松树经改良后能在火星上培植,因为火星上像寒冷和缺氧等许多条件非常像海拔 5700 米的奥里萨巴火山岩的状况。

研究计划目的在于,查明生物适应极端条件的机理,以便今后可以利用这一机理帮助在其他行星特别是在火星上的生存。为此科学家选择了能生长在如此坚硬和高海拔火山岩上的独特种类的松树,负责这项研究的库里博士指出,目前专家们倾向认为,是迁居于这些松树上的特殊细菌帮助它们在如此极端条件下存活了下来。

(周道其译自俄通社-塔斯社 1 月 15 日消息)