学生经常问到的一个有关相位的问题

杨占营　姚尚锋

一、问题的提出

相位、初相位是振动和波动中较重要的物理量,已知相位,可以确定振动的状态,而已知状态,如何用相位来表示时,教材上所得出的值常常是单一值,对相位、初相位的取值没有明确的说明。而在有关振动和波动的合成时,却有"当两谐振动的相位差 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,合振动的振幅最大…"的说法,很多学生对这种前后不同的叙述提出疑问,笔者就此谈谈自己的看法。

二、已知初始条件,初相位可以在一系列值中任选一个

相位、初相位都是与状态有关的量,初相位与初始条件有关,相位与任意时刻的状态有关。初相位是"特殊时刻"的相位,是描述振动状态的参考点。在已知初始条件,求其对应的初相位时,可以用公式,也可以借助于旋转矢量法,都借助了数学工具。在利用公式求初相位时,可利用 $x_0=A\cos\varphi$ 和 $\nu_0=-A\omega\sin\varphi$ 和 $tg\varphi=-\nu_0/x_0\omega$ 中的任意两个公式求出。

由于正弦、余弦和正切函数的周期性,我们得出的结果是一系列值。举个例子,在初始时刻,当作谐振动的物体位于正的最大位移时,其初相位为 $2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,一般常取 k=0 的值。根据 $x_0=A\cos\varphi=A$,和 $\nu_0=-A\omega\sin\varphi=0$,有 $\cos\varphi=1$ 和 $\sin\varphi=0$,所以 $\varphi=2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。每经历一个周期,相位变化为 2π;振动在一个周期内的状态各不相同,初相位的值在一个周期内的变化范围是 $[0.2\pi)$。至于 $\varphi=\mathrm{arctg}\dfrac{-\nu_0}{x_0\omega}$,是不能得出正确结果的,因为反正切函数的值域是 $(-\pi/2,\pi/2)$,与初相位可以是一系列值矛盾。理论上,我们可以用 $\beta+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\beta\in[0.2\pi)$ 来表示某状态对应的初相位,这里 k 取什么值无关紧要,只是利用该时刻的初相位作为一个参考点,以后的状态均以其为参考。但这样写,形式上比较复杂,以后的描述也麻烦,通常只选一个书写最简洁的值。举例如下,当说到初相位 $\varphi=-\pi/6$ 时,用 $\varphi=11\pi/6$ 也可表示该状态的初相位,我们不能说该状态的初相位就是 $\varphi=-\pi/6$ 或 $\varphi=11\pi/6$,而只能说这个状态的初相位可以是 $\varphi=-\pi/6$,也可以是 $\varphi=11\pi/6$。虽然 $\varphi=-\pi/6$ 与 $\varphi=11\pi/6$ 均可表示同一状态的初相应,但习惯上取 $\varphi=-\pi/6$。当初相位唯一地被确定后,振动在此以后的任一时刻的相位也就被唯一地确定了。

三、相位差与初相位之差可以是一系列值

当讨论两个同频率谐振动的合成时,计时起点是两振动的"公共计时起点",所以两振动的相位差在数值上等于初相位之差,即 $(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1$ 但在计时起点时,振动一、二的初相位的值可分别是 $\varphi_1=a+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,a\in[0,2\pi)$;$\varphi_2=\beta+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\beta\in[0,2\pi)$,因此,两振动的相位差等于 $(\beta-\alpha)+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。举个例子,振动一的初相位的值可以是 $-\pi/6$ 或 $11\pi/6$,振动二的初相位可以是 $-\pi/3$, $5\pi/3$,这样以来,相位差的值就可能是 $-\pi/6$, $11\pi/6$, $-13\pi/6$ 中的一个,这些值之间刚好相差 2π 的整数倍。于是,有"当两谐振动的相位差 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,合振动的振幅最大…"的说法。说明一点是,这是同频率、同方向的谐振动的合成,所以有这样的特殊结果。

(安徽蚌埠坦克学院物理教研室　233013)