

从单摆看混沌

陈世鸥

众所周知,当单摆在摆角很小时,其运动可以看作简谐振动,用简单的线性微分方程即可描述。但在摆角很大时,其动力学行为就必须要用非线性方程才能描述了。考虑既受外界周期性驱动力,同时又受阻力的情况,单摆的运动方程可写为:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\varphi - \frac{r}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{F \cos \Omega_0 t}{ml} \quad (1)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ 为单摆的固有频率, r 为阻力系数, Ω_0 为驱动力的角频率, F 为外界驱动力的幅值。此方程不能用解析方法求解,但可在给定参数和初始条件后进行计算和讨论。

一、 $F=0, r=0$ (即无驱动力、无阻尼)

小角度摆动 当摆角 φ 很小,在无驱动力且无阻尼作用的情况下,单摆的运动可以看作简单的周期运动,如图 1(a) 所示。

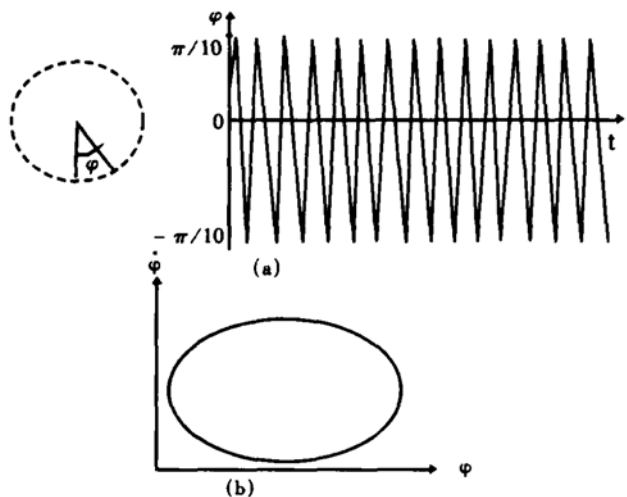


图 1(a) φ 很小时的周期运动

(b) 在 $\varphi-\dot{\varphi}$ 相图上的椭圆曲线

图 1(b) 为单摆在小角度下的相图,其中

$\varphi = \frac{d\varphi}{dt}$ 。将(1)式中的 $\sin\varphi$ 展为无穷级数

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots$$

因为摆角很小,故可只取展开式的第一项 φ ,此时(1)式可简化为线性方程,是我们通常所讨论的形式。

大角度情况 当单摆的摆角 φ 很大时,则 $\sin\varphi$

就不能简单地线性近似了,这时需求解非线性方程。图 2 为初始摆角 φ_0 由 10° 逐渐增加到接近 180° 时单摆运动周期的变化情况。

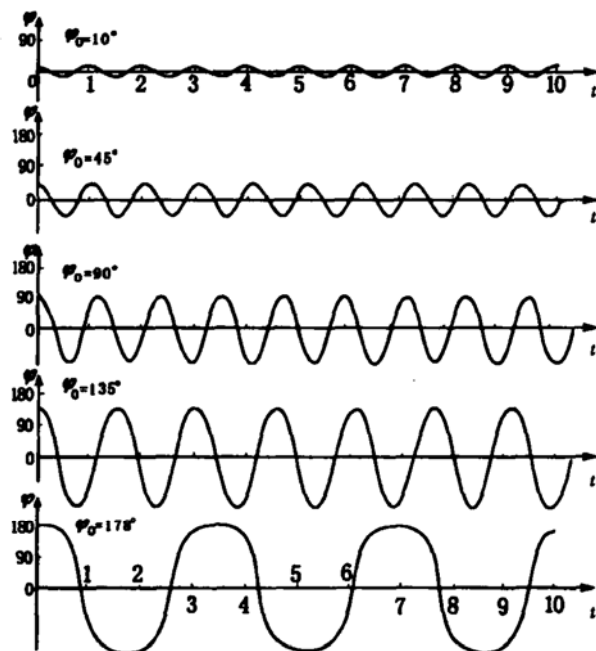


图 2 自由单摆从不同初始摆角开始的周期运动

由图 2 可以看出,当 φ_0 接近 180° 时,单摆的周期将迅速趋向无穷大。这意味着 $\varphi_0 = \pi$ 的位置是单摆运动中的一个不稳定平衡点。显然,当单摆的能量正好为摆球到达不稳定平衡点所需的能量 E_0 时,摆球接近该点又不超越该点的时间是无穷大;当摆的能量大于 E_0 时,摆球的运动将不再是摆动,而是围绕悬挂点的转动。研究相图发现,摆动与转动由一组分界线区分开——分界线内表示摆动,分界线外表示转动。由于中学物理与大学普通物理一般只涉及小角度摆动,用分界线内的相图表示即可。显然,离中点越近,说明摆角越小,系统的线性特征就越明显。

二、 $F=0, r \neq 0$ (即无驱动力,有阻尼)

当单摆不受驱动力,但有阻尼时,随着 φ_0 从小角度逐渐增大,单摆的运动方程将由线性变为非线性。

小角度摆动 图 3 为线性近似下阻尼系数 $r < 0, r = 0, r > 0$ 时的单摆运动的相图曲线。可以看

现代物理知识

出,当 $r > 0$ 时,由于能量耗散,单摆的振幅越来越小,速度也越来越慢,直至停止在下垂的平衡位置。这种有阻尼的振荡在相图上为一根内旋的对数螺线,静止的位置为单摆的稳定点,相图上螺线的中心点是稳定焦点,为阻尼单摆运动的吸引子,称为不动点吸引子或定常吸引子;当 $r < 0$ 时,为负阻尼情况,总能量增加,单摆小球最终要远离下垂的平衡位置,因此,平衡点为不稳定焦点,是排斥子,相图曲线为一根外旋的对数螺线;当 $r = 0$ 时,螺线中心对应的位置称为边缘稳定点,此时的相空间运动轨迹为一组同心圆。

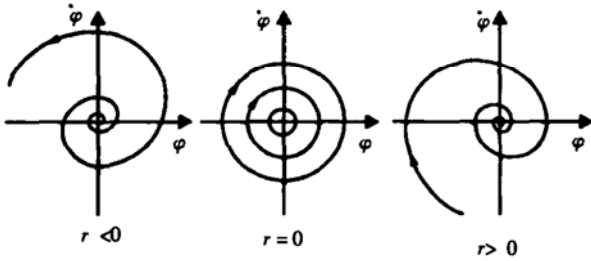


图3 在线性近似下单摆运动的相图

大角度情况 随着 φ_0 逐渐增大,单摆的运动方程变为非线性方程。在这种情况下,单摆从初始位置下摆时,由于运动过程中的阻尼作用,摆球再也不能回到原来的高度。经过来回多次正阻尼振荡后,单摆的振幅越来越小,最后趋于中心点。若研究相图,可以看出区分摆动和转动的分界线消失了,整个相图被划分为两个区域,从每个区域出发,相空间运动轨迹都流向该区中心的吸引子,这样的区域称为吸引域,不同的吸引域用黑白两色分开。就像一个汇水盆地可以让水集中流向盆底一样,只要确定了初始点相对于分界线的位置,就可以准确地预言状态的演化。

三、 $F \neq 0, r \neq 0$ (即有驱动力,有阻尼)

根据(1)式可知,在既有驱动力,又有阻尼的情况下,影响单摆运动的参数为 r (阻力系数)、 F (驱动力振幅)和 Ω (驱动力频率)。(2)式通常写为:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = f\cos\Omega t \quad (2)$$

此处的 t 相当于(1)式中的 $\omega_0 t$, $\beta = r/(2m\omega_0^2)$,称为无量纲的阻尼系数, $f = F/(m\omega_0^2)$,称为无量纲的驱动力振幅, $\Omega = \Omega_0/\omega_0$,称为无量纲的驱动力频率。

可以对这3个参量在不同数值组合情况下进行

数值计算,画出相图。对于给定的参量值,相图上的轨道往往经过一个暂态过程就进入到终态,且参量值不同,终态也不同。图4表明,在某些参量取值下,单摆运动会出两个终态周期解。如图所示,它们的相图呈现出不对称性。

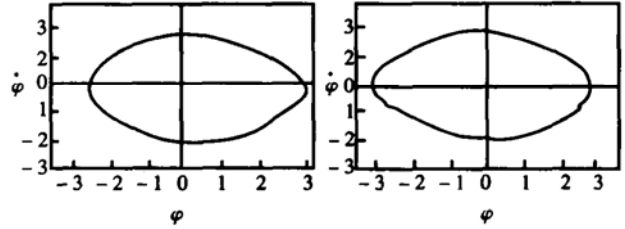


图4 有驱动力有阻尼时单摆运动的相图
($\beta = 0.25, \Omega = 2/3, f = 1.025$)

β 和 Ω 保持不变, f 逐渐增加时单摆的相图会产生如下变化:

- (a) $f = 1.07$, 出现 2 倍的周期,即驱动力经过两个周期后单摆运动才恢复原状;
- (b) $f = 1.15$, 此时相轨道的点在相图上的分布看似没有规律,但反映了某种内在的结构特征;
- (c) $f = 1.35$, 相轨道的点又呈现为比较简单的形式,此时驱动力经过一个周期,单摆运动恢复原状。与(a)不同的是,单摆此时并非作来回振荡运动,而是作单向的旋转;
- (d) $f = 1.45$, 单摆运动出现 2 倍的周期,作单向的旋转;
- (e) $f = 1.47$, 单摆运动出现 4 倍的周期,作单向的旋转;
- (f) $f = 1.50$, 单摆运动的相轨道出现比(b)更混乱的情况。

可以证明这种“貌似”无规律的分布形成了奇怪吸引子。比如当 $\beta = 1/8, \Omega = 2/3, f = 1.5$ 时,可以测得单摆运动所形成的奇怪吸引子的几何维度 $d = 1.3 \pm 0.1$ 。

由此可见,在受迫阻尼运动中,单摆的运动反映出如下特征,即:

- (1) 描述运动特征的动力学方程是非线性的;
- (2) 这些非线性的方程是“确定性的”,不包含任何随时间变化的随机项;
- (3) 在某些情况下,系统运动轨道的时间行为存在对初始条件的敏感性,初始条件的微小差异可能导致结果的面目全非;
- (4) 整个系统长期行为的全局特征(如奇怪吸引

导弹克星——粒子束武器

储德林 江海燕 张强华



自从原子弹发明以后,经过半个多世纪的发展,迄今先后出现了4代原理不同的核武器。第一代是原子弹;第二代是氢弹;第三代是单项功能强化的核弹,典型代表有:中子弹、冲击波弹、钻地弹、电磁脉冲弹等;第四代则基于原子弹技术,关键研究设施是惯性约束聚变装置,因其发展不受《全面禁止核试验条约》的限制,一些国家正在加紧第四代核武器的研制。目前,在研的第四代核武器主要有:当量可调弹头、“合二为一”弹头、干净的聚变弹、反物质弹、激光引爆炸弹以及粒子束武器等。其中粒子束武器是把电子、质子、中子或其他粒子加速到光速后,发射到大气层内或外层空间,用来摧毁卫星和洲际弹道导弹。

一、粒子束武器基本原理

粒子束武器是把高能粒子,比如原子核、 α 、 β 一类的中性粒子或者电子、质子、各种重离子一类的带电粒子,加速到相对论速度(接近光速),将这样的高能粒子束发射到远距离的目标上,粒子束所携带的巨大能量在不到1秒钟的短时间内传递给目标,同时利用这些高能粒子与目标物质发生的强相互作用,达到摧毁和破坏目标的目的。粒子束武器一般由粒子加速器、高能脉冲电源、目标识别与跟踪系统、粒子束精确瞄准定位系统和指挥控制系统等组成。加速器是粒子束武器的核心,用来产生高能粒

子)与初始条件无关。

混沌是在确定性的非线性系统中,貌似无序、实则有序的、不需附加任何随机因素亦可出现类似随机的行为。混沌系统的本质在于各物理量间的非线性关系,最大特点是系统对初始条件的极度敏感,故而有“蝴蝶效应”的惊人论断,即“在巴西一只蝴蝶翅膀的拍打能够在美国德克萨斯州产生一个陆地龙卷风”。虽然在受迫阻尼运动中,单摆不具有这种“小能量控制大能量”的神奇,但它也是一种混沌现象。

混沌理论的重大意义在于对我们所处世界复杂

子,并聚集成密集的束流。目标识别与跟踪系统主要由搜索跟踪雷达、红外探测装置及微波摄像机组成。探测系统发现目标后,目标信号经超高速计算机处理,进入指挥控制系统,根据指令,定位系统跟踪并瞄准目标,同时修正地磁误差等影响,启动加速器,将粒子束发射出去。根据粒子束性质

的不同,粒子加速可采用带电粒子束加速器和中性粒子束加速器。

带电粒子束加速器 目前研究较多的带电粒子束加速器为质子加速器,其基本原理是:利用线性铁氧体磁场感应加速器产生高能电子束,用来包围进入离子发生装置的质子,使质子在离子加速装置中得到加速。在接近出口时,将电子剥离,并利用磁场的箍缩效应使质子束变成高能定向束流,然后通过武器发射系统把质子束发射出去。

中性粒子束加速器 中性粒子束宏观不呈电性,通常的电磁场加速技术不能对其直接加速。为获得高能中性粒子束流,需进行相关技术处理。具体方案是:将负离子束(例如 H^-)在加速器中加速、聚焦并准直,在出口处的剥离室内通过原子碰撞或光致分离过程进行中性化处理,以去掉多余的电子,还原成中性原子束,然后聚集成高能定向束流,以接近光速的速度沿直线轨道发射出去,摧毁目标或使其失效。

带电粒子束在大气中传输时,虽有衰减,但可以

性的发现,许多物理学家因而将其与相对论、量子力学并列为20世纪物理学的三大发现。混沌被普遍应用于激光物理和超导物理等领域,但它并非为高科技领域所特有,而是普遍存在于我们的日常生活中。混沌现象是普遍的,它反映在受迫阻尼运动中的单摆、点燃香烟袅袅升起的涡卷、水龙头缓慢滴水的花样等。确定性的深入往往导出不确定性,而哪里有不不确定性,哪里就会有混沌,因此,经典物理与现代物理之间的距离并没有我们想像中的那样远。

(金华浙江师范大学数理学院 321004)