重整化方法及其应用的研究进展

柴立和

爱因斯坦曾经说过,“我想知道上帝是如何创造这个世界的。我对这个或那个现象、这个或那个元素的谱并不感兴趣。我想知道的是他的思想,其他的都只是细节问题。”作为科学家,肯定醉心于探索这种基本思想的感受,那么大自然究竟是按照什么基本思想和规则设计的呢?重整化思想可能是其中的一个主要候选者。

重整化是研究微观机理如何导致宏观现象的一种方法,它起始于量子场论,成熟于临界现象,目前它已经在极其广泛的领域获得了推广和应用:量子场论;相变与临界现象;磁性系统、随机行走、随机扩散等随机过程;动力系统与混沌;化学中的聚合物与软物质;逾渗现象,分形结构、湍流与复杂系统等。重整化已经成了一门横跨各领域和各学科的共同研究方法。

基于重整化方法在各个领域的爆发式应用,对其全面综述已经不可能了。关于重整化在量子场论和平衡相变中的应用,已经有了比较好的英文综述。相反,对重整化的整个发展历程以及当前的一些研究前沿,特别是重整化在复杂系统理论方面的应用,则几乎没有见到任何综述报道文献。为了填补这个空缺,本文试图从重整化方法发展的主要脉络入手,简述重整化方法的起源及其发展历史上几个里程碑。重点阐述了重整化方法在复杂系统理论方面的应用以及重整化方法用于复杂系统方面所面临的挑战性问题。

四五十年代:重整化的肇始
——量子场论中的重整化

对物质结构的探索,是物理学的主要任务之一。19世纪和20世纪之交,一个激动人心的探索物质世界结构的革命开始了。原子大门的敲开及随之而来的量子力学的创立,使得人们对物质微观结构的认识达到了前所未有的高度;相对论的创立则给人们清晰地展示了宇观尺度上物质结构的时空本质。为了协调量子力学与相对论,狄拉克、约旦、维格纳、海森伯和泡利等人创立了量子场论。他们考虑用二次量子化的场,即一种包含粒子产生与湮没算符的时空函数,来表示基本粒子,从而实现点粒子描述和具有广延性质的物质场描述的统一性。这种表述与本来的量子力学相比有了巨大的进步,但是在数学上,量子场论系统拥有无穷多的自由度,这使得量子场论自诞生以来就危机四伏,其数学结构至今也还没有被彻底地弄清楚。量子场论的第一个里程碑是描述电磁相互作用的量子电动力学(QED),它精确地描述了正负电子与光子之间的相互作用。QED描述的相互作用是较弱的,人们试图对其进行逐级微扰展开求解,但却发现高阶修正都是无穷大,这种无穷大和量子场论所描述的系统具有无穷自由度有关。为了消除这样一些发散项,在40年代末,贝特、施温格、朝永振一郎、费恩曼、戴森(Dyson)等人引入了一种称之为重整化的方法,发展了重整化理论,部分地解决了这一难题。重整化的基本思想是把一些发散项吸收到一些基本“常”量中去,而一些无穷大的常量却是我们永远观测不到的,所能观测到的只是那样一些经过重整化了的有限大小的量。在重整化方法的基础上,QED发展逐渐成了一个非常精确地与实验符合的优秀的理论。重整化方法从此有了非常成功的开端,施温格、朝永振一郎、费恩曼因为这项工作一起获得了1965年的诺贝尔物理学奖。

尽管量子电动力学已被认识到是一个可重整化的规范理论,但是这样的一种方法并不是对任何一种理论都适用,如果一个理论中的基本发散项随着微扰的展开越来越多的话,那么就无法将所有的发散项全部吸收到有限的几个基本常量中去。我们称这样的一种理论是无法重整化的。非阿贝尔规范场论的提出,是量子场论又一个里程碑式的成就,它是一个描述所有粒子相互作用的一个基本框架。严格证明这种理论是否能被重整化,在很长一段时间内是一个没有得到解决的问题。直到70年代初,这样的一个难题方被霍夫特和沃尔特曼攻克。他们证明了当时基于规范理论的其他统一模型,都是可重整化的。他们的这项工作,意义重大,使杨——米尔斯理论又一次焕发出了活力,也使重整化方法更加深入人心。1999年霍夫特和沃尔特曼荣获了诺贝尔物理学奖。人们相信,描述强、弱和电磁3种相互作用

的量子场论（包括量子电动力学和量子色动力学），都是可以重整化的。当然在此过程中伴随而出现的成就是，随着高能加速器的能量不断提高，人们对于物质世界的微观结构越来越清楚，多年理论和实验的努力终于形成了所谓粒子物理的"标准模型”。它在非阿贝尔规范场论的框架下，统一描述了人类已知标准模型的粒子谱以及相互作用中的3种作用，强、弱和电磁相互作用。科学发展的下一个任务是建立统一4种力的终极理论，这将意味着量子力学和广义相对论相结合，即要建立量子的相对论性引力理论，即量子引力理论，简称量子引力。首先遇到的是引力场量子化，接着就是量子引力的重整化，而量子引力的重整化被称为20世纪基础物理学的著名困难。量子引力理论中会出现不可消除的发散行为，从而使所建立的量子引力是不自洽的。当然70年代中期以来对量子引力的研究，人们在超引力和超弦两个方向进行探索。目前超弦理论可能是克服广义相对论和量子力学不自洽的唯一有希望的理论，同时又是统一自然界4种基本作用的最佳候选者。当然目前该理论的理论框架还是很初步的，不少重要的问题还没有解决。

六十年代末～七十年代初：重整化方法的重要拓展——相变与临界现象中的重整化

50年代以来，随着重整化群理论在量子场论中的不断发展，它已经被成功地运用到各种不同的问题上。60年代末，威耳逊在研究量子场论的基础上，发展了处理相变与临界现象的新重整化方法，这是重整化方法发展史的一个重要里程碑。威耳逊认识到，临界现象与物理学现有的许多其他现象不同的地方在于人们必须在相当宽广的不同长度尺度上与系统中的涨落打交道。在通常的情况下，人们对某一给定的现象只是与某一给定的尺度打交道，比如无线电波、水波、可见光、原子核、基本粒子等等，这里每一个系统都以某一特定的尺度为特征，我们无需涉及范围宽广的尺度。而在临界现象中，既有大到与整个系统的尺度同数量级的大尺度的涨落，也有一直小到原子尺度的幅值更小的涨落。所有这些涨落在临界点附近都是重要的。在进行理论描述时，要考虑到整个涨落谱。用直接方法作正面处理，即使有最快的计算机帮忙也无济于事。

威耳逊试图找到一种新方法，不是正面处理，而是把问题分解成一系列简单得多的问题，其中每一部分都是可以解决的。1971年威耳逊发表了两篇有重大影响的论文，把量子场论中的重整化群理论基础作了实质性的改进后明确而深入地解决相变的临界现象这个问题。随后的几年他又发表了一系列论文，建立了关于临界现象的理论，对临界点附近的行为做出了全面的理论描述，并提出在数值上计算这些临界指数的方法。他的分析证明，当足够趋近临界点时，系统的大多数变量都将成为多余的。临界现象基本上决定于两个数：系统的尺度和所谓的序参数。序参数在朗道的理论中就已引用，但威尔逊的重整化理论从极大的普遍性引出了这个物理结论。它表明，许多看似毫不相干的系统，在临界点附近会显示相同的行为。我们可以举出如下的实例：液体、液态混合物、铁磁体和二元合金，都显示同样的临界特性。60年代以来的实验和理论工作都证明有这种形式的普遍性，但威耳逊的理论从基本原理上给出了一个有说服力的证明，计算所得的临界参数和实验结果相符得也很好。

七八十年代：重整化方法的几个重要延伸

70年代以来，重整化方法得到进一步的发展，在诸多领域取得了重要进展，以下介绍的是几个最重要领域的研究成果。

现代有效量子场论的重整化　在量子场论中，可重整化条件对场间的相互作用表达式有很强的限制，要求理论有可重整性也就成了绕不过去的障碍。这给问题带来了很多困难，例如建立可重整化的量子引力场论就遇到了难于克服的困难。近几年来，由威耳逊在临界现象中引入的重整化方法被反馈到量子场论中而形成了现代有效量子场论（包括有效拉格朗日量、有效相互作用量、有效势和有效哈密顿量），该理论并不要求有可重整性。在有效量子场论中，如果我们仅仅对一定能量以下的物理现象感兴趣，我们可以将高能的模“积掉”，也就是说高能的模对低能模的效应可以由低能模的有效哈密顿量或者拉格朗日量完全体现出来。不同的高能拉格朗日量可能产生相同的低能拉格朗日量，如果我们仅对一定能量以下的物理现象感兴趣，高能理论的行为就无关紧要了。

动力系统与混沌中的重整化　尽管KAM理论的证明可能是最早把重整化方法用到动力系统的，但这方面引起人们普遍注意的代表成果是Feigenbaum的混沌普适性理论。70年代，Feigenbaum对

Logistic 动力学映射进行研究时，用重整化方法发现了该动力学映射中的普适常数，为混沌动力学奠定了一个重要基础，从此重整化方法也成了动力系统和混沌理论研究的一门重要数学工具，动力系统的重整化也开启了近年来重整化方法用于复杂系统研究的一个序曲。

化学高分子聚合物、软物质等领域中的重整化

70 年代，重整化方法还被应用到化学领域。在这方面的代表成果是 Gennes 的对聚合物的重整化理论。聚合物被认为具有极其复杂的随机结构，但 Gennes 通过对聚合物进行重整化分析，得出了聚合物所具有的普适性质，从而发现被认为极其复杂的现象中也具有普遍而简单的规律。由于他在聚合物等软物质方面的杰出贡献而被授予 1991 年诺贝尔奖。继 Gennes 的工作之后，重整化方法还用到随机行走、随机扩散、逾渗过程等领域的研究。

八十年代以来：复杂系统的重整化
——重整化方法的新挑战

重整化方法在复杂系统方面的应用无疑是从 80 年代至今最具有挑战性的前沿研究课题。自近代科学诞生以来的研究中，人们对客观对象的分析主要运用还原法，即便 20 世纪的相对论和量子力学这两大革命也是如此。而人类面临的实际系统是复杂多变的，是一个涉及到多种因素和多方面相互作用的复杂系统，是没法还原而必须从整体论的角度去把握。近 20 年来以复杂现象为研究对象的复杂性科学已经引起了国际社会众多有识之士的高度关注，目前国际上已经掀起了一股研究复杂性和非线性问题的热潮，并正在与各门学科进行交叉，数学家、物理学家、化学家、生物学家、经济学家和计算学家等都在共同开展这一问题的研究，复杂性科学将成为一个驾驭在 21 世纪数学、物理学、化学、生命科学、信息科学、材料科学等高新领域之间的一个横断学科，被誉为“21 世纪的科学”。

复杂系统的非线性、非平衡性、不可逆性、开放性、多层次性、动态性、自组织性、临界性、自相似性、统计性等特征向现有的科学理论提出了巨大的挑战，这些挑战以复杂系统最本质的特征即多尺度性为核心，不可置疑，多尺度是贯穿非线性和复杂性问题的一个最核心的红线。显然，对习惯研究单一尺度的人们来说，在对待多尺度问题上，研究方法上还需要有更大的突破。复杂系统是一个多尺度系统，且尺度之间是相互耦合的，这正是重整化方法可以发挥重要作用的场所，目前重整化理论已逐步开始用来处理多尺度的复杂系统。不过这方面的研究还处于刚刚起步阶段，成型的研究成果还不多，以下仅从几个方面来阐述这一问题。

复杂系统作为无穷维动力系统的降维或降自由度需要重整化方法。

人们在自然界和社会中遇到的复杂系统实际上都是由微分方程控制的动力学问题，不过对于许多复杂系统，如经济系统，我们很难写出它们的微分方程。对于许多复杂系统，即使写出了其微分方程，也往往由于其非线性特征，很难得到其解析解，如流体力学的 N－S 方程。现有的非线性科学，主要集中讨论低自由度的常微分方程或方程组，对具有大自由度或无限自由度的非线性偏微分方程还没有好的处理办法。当然近些年来流行的元胞自动机（CA）、基于主体的模拟（ABS）或耦合格子映射法（CLM）等则回避了非线性方程，可以对一些大自由度问题提供较好的模拟结果，也给人们不少启示，但由于不是从原始微分方程的角度出发，它们在元胞相互作用的规则假定方面则有人为性，很难说这些人为假定的相互作用规则真实反映了系统的相互作用。

针对无穷维的非线性偏微分方程，无穷维动力系统理论从找到原问题对应的低维惯性流形（吸引子）出发，解决了一大类方程中吸引子存在性问题，但对于吸引子所表现的动力学性质却无法处理。目前对无穷维动力系统急需发展一套重整化方法，用以不失去主要信息地把复杂系统无穷维问题转化为低维问题来处理，并且重整化后的层次或尺度间的传递关系就体现了复杂系统的动力学。目前这还刚刚起步，仅有一些零星的探索，面临的挑战是非常巨大的。

理解复杂系统分形形成的物理机理需要重整化方法。

复杂系统往往具有标度和分形结构，现有的分形图形生成方法有实数相空间上的非线性映射、非线性微分方程求解、保守系统准规则斑图；复域上广义的朱丽亚集和芒德勃罗集”等势面着色”方法，球面、双曲面对称图形的动力学生成；迭代函数系统（IFS）、分形插值和小波变换方法；林德梅叶形式语言方法；扩散置限凝聚（DLA）模型、元胞自动机

(CA)模型和自组织临界性(SOC)方法等。目前对分形形成的物理机理认识上，主要是通过混沌动力学来实现的，不过尽管混沌动力学是从微分方程出发的，但在相空间上得到的分形结构并不是真正意义上的分形。

平衡相变中临界现象引起的标度结构是由对哈密顿量(具有极值特性)的重整化而得到的，由此我们认为，分形形成的物理机理，需在微分方程的基础上，结合一个新的原理(极值原理)，再采用重整化方法来才能得到认识。如何从微分方程中提炼出极值的概念，并考虑尺度的关联并进行重整化是一个重要的问题。目前国际上这方面的工作也还刚刚起步。

复杂系统的多尺度算法需要重整化方法。

重整化是一种粗粒化方法，它适合处理具有大量信息的多尺度系统，它的技巧在于从大量的信息中抽出事物的本质特征。但是重整化作为一个研究多尺度现象的重要理论曾一度一直只局限在平衡现象的研究中。近年来重整化方法也被开始用来研究非线性动力学，这包括非线性常微分方程和非线性偏微分方程的重整化。湍流是一个典型的动力学多尺度问题，目前用重整化方法求解已获得了比较好的成果。对有微分方程（包括常微分方程和偏微分方程）描述的复杂系统，如材料力学系统、流体力学系统等，重整化方法有利于理解宏观现象从微观到宏观的各个细节。

具体来说，目前重整化技巧一方面被用来分析偏微分方程控制的动力系统的奇异标度特性，而更重要的是另一方面，即用来对偏微分方程控制的动力系统进行快速计算。偏微分方程控制的多尺度问题的直接数值求解往往相当困难，在很多情况下还有可能是不现实的，必须发展出一套多尺度计算的技巧。多尺度算法就是在特定的尺度上选定一系列代表性的模型，同时把内部更小尺度的效应通过重整化方法归入模型。例如 Monte Carlo 模拟就是在小网格上获得信息，输入到大网格实现大尺度的有效计算。为了快速有效求解多尺度问题，研究者在传统的有限差分法、有限元法、谱方法等基础上提出了多重网格法、多水平法、区域分解法等；近些年来多尺度和多层次关联已经在计算数学理论和应用计算方法领域极大地被发展起来。最近为了研究不同的区域或不同的尺度有不同物理规律的情形，研究者还发展了多尺度物理模型。目前针对多尺度问题的计算方法还在蓬勃发展当中。

理解复杂自然界的统一性与多样性需要重整化方法。

科学家追求的是物质世界的规律，这些规律通常以方程式来表达。例如牛顿的运动方程式、麦克斯韦的电磁场方程式、量子力学中的薛定锷方程式等。我们只要知道了方程式，原则上就能够了解(预测)物质(如地球、人造卫星、棒球、电子)随时间演变的情形。

牛顿的运动方程、麦克斯韦方程、爱因斯坦的狭义与广义相对论方程、狄拉克方程、海森伯方程和其他五六个方程是物理学理论架构的骨干，达到了科学研究的最高境界。它们以极度浓缩的数学语言写出了物理世界的基本结构，可以说它们是造物者的诗篇。

复杂系统的重整化的核心就是寻找重整化变换方程。我们认为层次或尺度间重整化变换方程是描述复杂系统的基本关系式，它等同于物理学中其他著名方程的地位。对重整化变换方程求解可以得出很多有意义的结果。我们认为复杂系统层次或尺度间重整化变换方程含有复杂系统的所有特征。

与平衡相变的普适性分类一样，我们认为根据复杂系统的重整化方程，还可以对复杂的自然现象进行分类，从而理解大自然复杂系统的多样性与统一性。

重整化方法不仅是科学家解决问题的一个重要工具，而且是我们认识客观世界的一个基本指导思想。当然重整化的数学基础仍然缺乏，但无疑没有妨碍重整化在各领域的应用。本文姑且为未来这方面的研究作一个抛砖引玉吧！

（天津市天津大学环境科学与工程学院　300072）

名人妙语

有人说天文学是使人谦卑的事业，我愿意补充一点：它还是造就个性的事业。对我来说，天文学能够展示许多东西，其中之一就是人类荒唐的自负。我认为，这种情形给我们以强烈的揭示：我们有责任做到互相之间更加和睦，有责任来保护并珍惜这个暗淡蓝点——我们所知的唯一家园。

——卡尔·萨根