美国各大学1982年在华招收物理研究生试题及答案

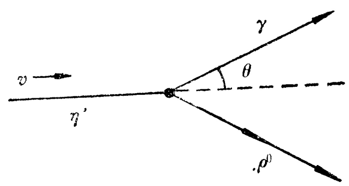
试题部分

近代物理部分（四小时）

（下列6试题解5题）

B1. 我们的宇宙是由 $T=3°K$ 温度的黑体辐射（光子）所充满。这是被认为早期“大爆炸”发展所遗留下来的。(i) 用 T 和普适常数解析地表示出光子数密度 n。答案应该明显表示出对温度和普适常数的关系。但是，可以使某个数值公因子留在一个无需计算的无量纲的积分内。(ii) 现粗略地估计这个积分，用你所知道的普适常数，并粗略地确定 $T=3°K$ 时在两个数量级的范围内的 n。

B2. η' 介子（令 m 表示它的质量）能衰变成 ρ^0 介子（质量 m）和光子（质量 $=0$）：$\eta'\to\rho^0+\gamma$。



在原 η' 介子的静止系中衰变是各向同性的。现假设单能 η' 介子束在实验室系中以速率 v 运行，并令 θ 为光子相对于粒子束的角度，如图所示。令 $P(\theta)d(\cos\theta)$ 是 $\cos\theta$ 处在 $d(\cos\theta)$ 间隔内的归一化几率。

(i) 计算 $P(\theta)$ (ii) 令 $E(\theta)$ 是光子以 θ 角射出的实验室能量。计算 $E(\theta)$。

B3. 一质量为 m 能量为 E 的非相对论性粒子在一中心势 $V(r)$ 内受到量子力学地散射

$$V(r)=\frac{\hbar^2}{2m}U(r)\quad U(r)=-2\left(\frac{\lambda}{\cos h\lambda r}\right)^2,$$

式中 λ 是参数，这个特殊的势具有如此的特性。截面 $\sigma(E)$ 随能量 $E\to 0$ 而越来越大，当 $E=0$ 时就发散。很明显，E 很小时，截面主要是由 S 波 $(l=0)$ 所支配。因此对小的 E 只需计算 $l=0$ 的分波振幅即可。在这里，为了节省你的数学运算，给出下列数学方程

$$\frac{d^2\phi}{dr^2}+A\phi=U(r)\phi,$$

其中 A 是一正的常数，它的一般解是

$$\phi=\alpha(\lambda\tanh\lambda r-ik)e^{ikr}+\beta(\lambda\tanh\lambda r+ik)e^{-ikr}$$

式中 $k=\sqrt{A}$，而 α 和 β 是积分常数。

记住 $\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$。

计算 $E\to 0$ 时 $\sigma(E)$。

B4. 在固定星体的惯性系中看到一飞船沿 x 轴飞行，时间 t 时在 $x(t)$ 位置。自然在这个坐标系中速度和加速度是 $v=\dfrac{dx}{dt}$ 和 $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$。假设运动是这样的，在飞船的乘客所测定的飞船的运动加速度是常数。这意味着在任一瞬间变换到另一惯性坐标系而在此坐标系中飞船是瞬间静止的。令 g 是在那一瞬间飞船在该坐标系中的加速度，现假设时时定义的 g 是常数。

给定常数 g。在固定在星球的坐标系中，当 $x=0$ 时，飞船以初速 $v_i=0$ 飞行。问当它达到速度 v 时飞船飞行的距离 x 是多长？

可以用相对论运动学，所以 v 与光速 c 相比不一定很小。

B5. (i) 一个质量为 m 的非相对论粒子在势阱

$$V(x,y,z)=A(x^2+y^2+2\lambda xy)+B(z^2+2\mu z)$$

内运动。式中 $A>0$，$B>0$，$|\lambda|<1$，μ 是任意的。

求能量本征值。

(ii) 现在把问题变一下，考虑粒子在一新的势阱 $V_{新}$ 中运动。对 $z>-\mu$，任意 x，y 时，$V_{新}=V$。其中 V 是和 (i) 部分所给出的势阱相同。对 $z<-\mu$，任意 x，y 时，$V_{新}=+\infty$。

求基态能量。

B6. 在金属中传导电子的自由电子模型看上去是理想化了，但它经常是很成功的。其中包括，对某些金属的压缩系数给出很合理的解释。这立即产生了以下问题，已知零绝对温度 $T=0$ 时的粒子密度 n 和无互相作用的费米气的费米能量 ϵ_F。求等温压缩系数

$$k=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

式中 V 是体积，P 是压力。

$\left(\text{提示：记住 } PV=\dfrac{2}{3}E\text{，式中 } E \text{ 是总能量}\right)$。

题解部分

近代物理部分（四小时）

（6试题解5题）

B1. 解：光子服从玻色分布

$$n(\boldsymbol{k})=\frac{1}{e^{\beta\epsilon(k)}-1}\qquad\epsilon(k)=\hbar\omega=\hbar kc$$

$$\beta=\frac{1}{K_BT}\quad,(K_B\text{ 是鲍耳曼常数})$$

$$N=\sum_{k,\text{自旋}}n(\boldsymbol{k})=2\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{e^{\beta\hbar ck}-1}$$

因子 2 是来自每个 $\boldsymbol{k}$ 有两个自旋态.

那么 $\frac{N}{V}=n=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)I$

$I=\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{e^x-1}$ 显然 I 是 1 的数量级，实际上 $I\simeq 2.4$，因此 $n\sim 1000$ 光子数/厘米^3 ($T=3°K$)

B2. 解：令带星(*)号的量表示母粒子在静止坐标系里的量，不带星号的量是在实验室系的量.

对于光子 $p^*=\cos\theta^*=\Gamma\left(p\cos\theta-\frac{v\varepsilon}{c^2}\right)$

$$\varepsilon^*=\Gamma(E-vp\cos\theta)$$

所以 $\cos\theta^*=\dfrac{\cos\theta-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\qquad \Gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

(i) $p^*(\theta^*)d\cos\theta^*=p(\theta)d\cos\theta \qquad p^*(\theta^*)=\frac{1}{2}$

$$p(\theta)=\frac{1}{2}\frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta}=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}$$

(ii) $$\varepsilon=\frac{\varepsilon^*}{\Gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}.$$

但由静止系中能量-动量守恒知

$$\varepsilon(\theta)=\frac{(M^{*2}-m^2)c^2}{2M}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}.$$

B3. 解：$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\quad \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}=|f|^2.$

$$f=\sum_{l=0}^{2l+1}(2l+1)e^{i\delta}\frac{\sin\delta_e}{k}\rho_e(\theta)$$

对于 $E\to 0$，只有 $l=0$ 有贡献，并且

$$\sigma(E)\to 4\pi\frac{\sin^2\delta_0(k)}{k^2}$$

为了求得分波的振幅，令 $\psi=\frac{1}{r}\varphi(r)$ 并由

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+k^2\varphi=U(r)\varphi$$

和 $\varphi(0)=0$，即 $\alpha=\beta$ 在一般解中给出，因此 $\varphi\xrightarrow[r\to\infty]{}$ 常数 $\{(\lambda-ik)e^{ikr}+(\lambda+ik)e^{-ikr}\}$

同 $\varphi\to$ 常数 $\sin[kr+\delta(k)]Ne^{2i\delta_0}e^{ikr}-e^{-ikr}$ 比较得

$e^{2i\delta_0}=-\frac{\lambda-ik}{\lambda+ik}$ 当 $k\to 0,\quad \delta_0\to\frac{\pi}{2}$

$$\sigma(E)\to\frac{4\pi}{k^2}=\frac{2\pi\hbar^2}{mE}.$$

B4. 解：令 x', t' 是相对于固定的星球以速率 V 运行的坐标系的时空变数. $\Gamma=\sqrt{1-v^2/c^2}$

那么 $x=\Gamma[x'+v(t)],\qquad t=\Gamma\left(t'-\frac{v}{c^2}x'\right)$,

令 $v'=\frac{dx'}{dt'},\qquad a=\frac{dv'}{dt'}$ 就有

$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}},\quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{a'}{\Gamma^3\left(1+\frac{vv'}{c^2}\right)^3}$$

其中 $V=v$ (所以 $v'=0$)

$$a=\frac{a'}{\Gamma^3}=\frac{g}{\Gamma^3}\quad a'=g=\text{常数}$$

$$x=\int_0^v v\,dt=\int_0^v\frac{v\,dv}{a}=\frac{1}{g}\int_0^v\frac{v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$x=\frac{c^2}{g}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right\}$$

注意到对于 $v\ll c$ 情况，$x\to\frac{v^2}{2g}$ 这是通常非相对论的结果

B5. 解：取变数变换 $\xi=\frac{x+y}{\sqrt{m}},\ \eta=\frac{x-y}{\sqrt{m}}$, $z=z+\mu$. 那么有 $-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

和 $V=A(1+\lambda)\xi^2+A(1-\lambda)\eta^2+Bz^2-B\mu^2$.

简谐振子的求和与外加常数能量 $-B\mu^2$，其中频率

$$\omega_\xi=\sqrt{\frac{2A}{m}(1+\lambda)}\qquad \omega_\eta=\sqrt{\frac{2A}{m}(1-\lambda)},$$

$$\omega_z=\sqrt{\frac{2B}{m}}.$$

(i) $$E_{n_1n_2n_3}=\hbar\omega_\xi\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_\eta\left(n_2+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_z\left(n_3+\frac{1}{2}\right)-B\mu^2$$

其中 n_1, n_2, n_3 是非负的整数.

(ii) 对于 $z>0$，势是 V. 对于 $z<0$，为 $+\infty$. 要求 n_3 是奇数. 故基态相应于 $n_1=n_2=0$, $n_3=1$

$$E_{基态}=\frac{1}{2}\hbar(\omega_\xi+\omega_\eta)+\frac{3}{2}\hbar\omega_z-B\mu^2.$$

B6. 当 $T=0°K$ 时，对动量 $<\hbar k_F$，因而能量 $<\epsilon_F$ 的所有状态占据数都是 1，$\epsilon_F=\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}$. 对于两个自旋态

$$N=2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_{k<k_F}d^3k\qquad n=\frac{N}{V}=\frac{1}{3\pi^2}k_F^3.$$

(下转第19页)

（上接第31页）

$$E = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int_{k<k_F}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\,d^3k, \quad \frac{E}{N} = \epsilon = \frac{3}{5}\epsilon_F$$

由压力公式 $P = -\dfrac{\partial E}{\partial V}$，$P = \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{V}$

因此 $P \sim V^{-5/3}$

$$k = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{3}{5}\frac{1}{P} = \frac{3}{2}\frac{1}{n\epsilon_F}.$$

（陈崇光译　黄　涛校）