哈密顿和哈密顿力学

宫衍香　　马秋红

哈密顿其人

哈密顿(William Rowan Hamilton)是英国数学家、物理学家。1805年8月4日生于爱尔兰的都柏林,父亲是一位律师。少年时代母亲和父亲相继去世,他是在叔父的悉心照料下成长起来的,少年及青年时代,哈密顿没进过正规学校,但他从小天资过人,靠自学不仅掌握了12国语言,而且自修了数学。哈密顿12岁时已经读完了欧几里得的拉丁文《几何原本》,13岁即对牛顿的《自然科学与哲学原理》产生浓厚兴趣,开始研究牛顿和拉普拉斯的著作。17岁时,向爱尔兰皇家天文学会指出拉普拉斯《天体力学》中的数学错误,因为他发现了其中关于力的平行四边形法则的证明有误,令都柏林当时的天文学教授们大为震惊。1823年,18岁的哈密顿以第一名的成绩考入都柏林大学的三一学院。在此期间他几乎囊括了各种奖项,并用纯分析的方法写成了《光线系统理论》一文,建立了光的数学理论,被其导师布林克教授称为"同龄人中第一流的数学家"。

1828年,年仅22岁的哈密顿被任命为三一学院的天文学教授,兼任学校天文台台长。大学毕业后哈密顿定居在都柏林附近的邓辛克天文台,这一工作使他有较多的时间从事数学与物理学研究,同年获得爱尔兰皇家天文学家的称号。由于哈密顿的学术成就和声望,1835年不列颠科学进步协会在都柏林召开的会议上推选他为主席,同年被授予爵士头衔。1836年,皇家学会因他在光学上的成就而授予他皇家奖章。1837年,哈密顿被任命为爱尔兰皇家科学院院长,直至1845年。1863年,新成立的美国科学院任命哈密顿为14位外国院士之一,此外,哈密顿还是英国皇家学会会员和其他国家科学院的成员。1865年9月2日,哈密顿因痛风病故于都柏林,享年60岁。

哈密顿的研究工作涉及很多领域,其中成就最大的是力学、光学和数学(发明了四元数)。在力学方面,哈密顿的主要成就是使分析力学实现了继拉格朗日之后的又一次质的飞跃。他于1834年、1835年先后发表了《论动力学中的一个普遍方法》(*On a General Method in Dynamics*)和《再论动力学中的普遍方法》(*Second Essay on a General Method in Dynamics*)两篇重要论文,为分析力学掀开了新的一页。这样,人们把经典力学按照时间先后划分为不同力学时期,1687年自牛顿的《自然哲学的数学原理》发表以后到1788年拉格朗日的大型著作《分析力学》发表以前,称为牛顿力学;1788年以后称为分析力学;到1834年,哈密顿的著名论文《一种动力学的普遍方法》发表后,又称为哈密顿力学。

哈密顿力学的主要内容

哈密顿原理　1657年,法国数学家费马提出了一条基本原理,即光线在传播过程中总是沿着光程(光传播的路程与介质折射率的乘积)取极值的路径传播,这就是费马原理。这条原理可以解释为什么光在均匀介质中总是沿直线传播,因为两点间以直线距离最短。1833年,哈密顿把费马的这条原理引入经典力学,提出经典力学的哈密顿最小作用原理。1835年,他发表了具有深远影响的论文《变分作用原理》和《波动力学的一般方法》。在这两篇论文中,哈密顿首先从费马原理出发,发展了几何光学的定

自己采取严厉的批判态度,然后才给别人以这样的机会。即使现在,我想,对于我的观念,我能够提出的反对意见,比其他任何人都要强烈。"而对别人的批评,他却说:"真相迟早要大白于天下,而耐心回答比压服更能说服反对派,如果他们反对错了的话。"虽然曾在工作中饱受压制和打击,但是法拉第却始终对戴维心怀感激。他不但总是制止别人议论戴维的短处,而且还为修建戴维纪念碑慷慨解囊。

执着积极,坚忍不拔,淡泊名利,锐意进取,严于律己、宽以待人。将这些难能可贵的品格集于一身,也许这就是法拉第奇迹的根源。

(江苏无锡江南大学理学院　214122)

律,进而证明,光线轨迹可以利用对单一数学量——特征函数的计算得出。他发现,这一特征函数与对应单粒子动力学作用量函数的特征非常相似,而几何光学中光线轨迹又与牛顿力学单粒子的轨迹十分相似,这启发了哈密顿,他猜想,一定可以找到一种与几何光学类似的形式来表述力学规律,只要从力学的最小作用量原理出发,把它变换为与费马原理相似的形式,就一定可以找到力学与光学的统一表示。对比费马原理,哈密顿提出了著名的等时最小作用量原理,即哈密顿原理。

哈密顿首先用拉格朗日函数

$$L = T - V \tag{1}$$

定义出一种新的函数——作用函数

$$S = \int_{t_0}^{t} L\,\mathrm{d}t\ , \tag{2}$$

其中 T、V 为所讨论的力学系统总动能和势能。势能 V 不仅是广义坐标 q_α 的函数,还依赖广义速度 $\dot{q}_\alpha = \mathrm{d}q_\alpha/\mathrm{d}t$ 和时间 t。当 V 只依赖于广义坐标时,S 就可化为拉格朗日原理中的作用量。哈密顿认为力学系统的实际运动不一定会使作用 S 为最小,故哈密顿提出的原理叫做稳定作用原理。由 S 的一阶变分为 0,可导出力学系统的运动方程,即在完整的保守系统里,相同时间间隔内,物体从起始位置到终了位置的一切可能的运动方式中,真实运动的哈密顿作用量为最小。写成数学公式为

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t} L\,\mathrm{d}t = 0, \tag{3}$$

上式可以导出全部力学的基本定理和运动方程,上述原理不仅适用于完整保守系,而且还可推广到非保守系和非完整系。

哈密顿认为,体系在一定时间间隔内由一点到另一点满足约束条件的运动是多种多样的,这就需要在这些运动中找出满足动力学关系的真实运动。哈密顿原理所给出的就是这样一条准则。人们为了追求自然规律的统一、和谐,按照科学的审美观点,总是试图用尽可能少的原理去概括尽可能多的规律,哈密顿原理正好符合这样的要求。它具有统一、简洁、完美的形式,具有坐标变换的不变性,从而使其具有很大的普适性。哈密顿原理更深刻地揭示了客观事物之间的紧密联系,把力学原理归结为更为一般的形式,从而成为从经典力学到近代物理学理论的桥梁。因此,哈密顿原理有极其重要的理论价值,它可以用来创建新的理论,根据实验结果和假设构造出拉格朗日函数、使用哈密顿原理导出运动方程,这是牛顿三大运动定律建立之后力学理论发展的一次最大的飞跃。

哈密顿正则方程组　在分析力学中,拉格朗日建立了力学体系(保守系)的动力学方程,即拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s)。 \tag{4}$$

这是由 s 个二阶常微分方程构成的方程组(s 为体系的自由度数)。1835 年,哈密顿用具有动力学意义的正则变量(广义动量 p 和广义坐标 q)代替只有运动学意义的广义速度 $\dot{q}$ 和广义坐标 q,把拉格朗日函数和拉格朗日方程变换到哈密顿函数和哈密顿正则方程。哈密顿利用广义动量

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{5}$$

作为另一组变量,并引入一个新的函数

$$H = -L + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha, \tag{6}$$

H 是 p、q、t 的函数,称为哈密顿函数。用 H 可把方程(4)式化为 $2s$ 个一阶常微分方程构成的一阶微分方程组

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s)。 \tag{7}$$

这样的方程组后来被称为哈密顿正则方程组,p_α、q_α 称正则共轭变量。哈密顿正则方程形式简单而对称,故称为正则方程。在理论物理学中,以广义动量 p 和广义坐标 q 作为独立变量比用广义速度 $\dot{q}$ 和 q 作独立变量要广泛、方便,广义动量 p_α 在物理学中比广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 重要,这些量在统计物理和量子力学中经常用到。在经典物理学过渡到近代物理学的过程中,正则方程也常被认为是最方便的形式。

哈密顿–雅可比方法　从以上的分析可以看出,哈密顿正则方程有着很大优势,在分析力学中占有很重要的地位,因此求解哈密顿正则方程就成了分析力学中迫切需要解决的问题。哈密顿在提出正则方程组(7)时指出,可选择适当的变换,使变换后的新变量仍为正则共轭变量,但新哈密顿函数可能包含某些新坐标——循环坐标。每增加一个循环坐标,运动方程就可降低一阶,由此可作为正则方程组的一种原则解法。这种使运动方程保持正则方程组

形式的变换, 称为正则变换。但是正则变换依赖于一个函数——母函数的选择, 选择适当的母函数往往十分困难。后来哈密顿发展了一种特殊的正则变换方法, 即哈密顿–雅可比方法。

哈密顿结合作用和正则方程组的定义, 把作用函数 S 作为一个辅助函数

$$\frac{dS}{dt}=L=T-V\text{。}\tag{8}$$

对于满足正则方程组(7)式的解 p_α, q_α 有

$$p_\alpha=\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,s)\text{。}\tag{9}$$

由此可把 S 表示为广义坐标 q_α 和 s 个任意常数 α_i 以及时间 t 的函数, 而且满足关系

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},q_\alpha,t\right)=0\text{。}\tag{10}$$

(10)式实际上是函数 $S=S(q_\alpha,\alpha_i,t)$ 对自变量 q_α 和 t 的一个偏微分方程。这样就把正则方程组(7)式的解与偏微分方程(10)式的解联系起来了。后来德国数学家雅可比用不同方法导出和解释了上述关系, 他的工作表明利用正则变换使新的哈密顿函数等于 0, 也可得到偏微分方程(10); 而且证明, 对(10)式的任意一个完全解(即解出的函数 S 包含全部 s 个广义坐标 q_α, s 个独立积分常数 α_i 和时间 t)

$$S=S(q_\alpha,\alpha_i,t),\tag{11}$$

由相应关系

$$p_\alpha=\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}、\beta_i=\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\quad(i=1,2,\cdots s)\tag{12}$$

解出的

$$p_\alpha=p_\alpha(\alpha_i,\beta_i,t)、q_\alpha=q_\alpha(\alpha_i,\beta_i,t)\tag{13}$$

就是原正则方程组(7)式的通解, 其中 β_i 为另外 s 个独立积分常数。这就给出了正则方程组的另一种原则解法, 被称为哈密顿–雅可比方法。为了纪念哈密顿和雅可比在该方面的贡献, 偏微分方程(10)被称为哈密顿–雅可比方程。积分常数 α_i、β_i 称为正则常数。这些成果不仅推动了力学的发展, 而且也在变分法和微分方程的发展中起到了重要作用。

哈密顿力学的意义和应用

经典力学哈密顿理论有极其重要的价值。首先, 它是经典力学向量子力学和广义相对论过渡的桥梁。正如量子力学的建立者之一薛定谔所说, "哈密顿力学是现代物理学的基石"。现代物理学的两大基础——量子力学和广义相对论的建立都与哈密顿力学有着直接关系。薛定谔建立的量子力学波动方程是直接从哈密顿–雅可比方程过渡而来的, 在正则方程基础上发展起来的哈密顿–雅可比方程是量子力学建立以前相关领域的主要研究方法, 而狄拉克和费米所建立的路径积分形式的量子力学则与哈密顿原理的形式类似。爱因斯坦在建立引力场方程过程中也运用了哈密顿原理, 这在其经典著作《相对性原理》一书中有清楚的描述。其次, 是这一原理中的对偶性思想。对偶性即前面提到的力学与几何光学运动方程中的相似性。这些相似性表明, 粒子的行为可以由波动性描述, 而光的波动性又可以与粒子的行为相关, 这就是哈密顿原理中所蕴含的对偶性思想。根据这一思想, 本来不难进一步找到具有波动性质的力学方程。然而在哈密顿所处的时代, 经典力学被认为是绝对正确的, 粒子具有波动性被认为是不可思议的, 直到量子力学兴起以前, 哈密顿方程中对偶性的深刻意义在长达近一个世纪的时间里, 一直被人们所忽略。薛定谔曾在诺贝尔奖演讲中说: "哈密顿原理和费马原理之间的密切相似性几乎被忘记了。如果还记得的话, 也只是记住了数学理论的奇妙性。" 直到 20 世纪, 在德布罗意和薛定谔创建量子力学之后, 两原理间的相似性及深刻的物理内涵才被充分阐明。

(宫衍香, 山东省泰安市泰山学院物理与电子科学系 271021; 马秋红, 山东省肥城市第一高级中学 271600)

封底照片说明

有个童话故事, 讲的是一个男孩种下一棵神奇的豆子, 豆子长得非常快, 竟长到天上成了天梯, 男孩便顺着豆藤爬上了天。你相信吗, 也许不久这个童话就会变成现实。

国外科学家正在研究架设一条从地球到太空的"长梯", 该计划是在地球赤道海面上建造一个平台, 用航天飞船从太空垂下一条缆绳, 并将它连接在平台上, 随地球一起旋转, 旋转所产生的离心力刚好抵消地球引力, 天梯便这样架好了。然后在缆绳上再安装一个爬升装置上下移动, 可以把飞船、卫星、材料及观光客运到太空。目前搭建这个天梯还有许多的技术难关需要解决, 但在航天技术飞速发展的今天, 人类的任何梦想都有可能实现。

(李博文)