最速降线的挑战

吴佩萱

一、问题的起源与挑战的提出

意大利科学家伽利略在 1630 年提出一个分析力学的基本问题:“一个质点在重力作用下, 从一个给定点到不在它垂直下方的另一点, 如果不计摩擦力, 问沿什么曲线滑下所需时间最短”, 这就是科学史上著名的最速降线问题的起源。8 年后, 也就是 1638 年, 伽利略经过仔细研究得出了一个答案, 他在著作《论两种新科学》中认为此线是圆弧。尽管这个答案并不正确, 但是却为问题的解决指明了方向。

1696 年 6 月, 瑞士数学家、物理学家约翰•伯努利(Johann Bernoulli, 1667～1748) 在《教师学报》(Acta Eruditorum) 上再次就最速降线问题向全欧洲提出挑战。约翰提出的挑战很精彩, 他设想有不同高度且不在垂直线上的两点 A 和 B, 连接这两个点, 可以做出无限多的不同曲线, 从直线、弧线到其他任意曲线。现在设想有一个球沿着一条曲线从 A 点滚向较低的 B 点。当然, 球滚完全程所需要的时间取决于曲线的形状。挑战是, 找出一条曲线 AMB, 使球沿这条曲线滚完全程所用的时间最短。他称这条曲线为“最速降线”(brachistochrone), 由希腊语中的“最短”(brochistos) 和“时间”(chronos) 两个词合成。为确保无人误解这道难题, 约翰又重复了一遍:“在连接已知两点的无限多的曲线中……选择一条曲线, 如果用一根细管或细槽代替这条曲线, 把一个小球放入细管或细槽中, 放手让它滚动, 那么, 小球将以最短的时间从一点滚向另一点”。

显然, 人们的第一个猜想是连接 A、B 两点作直线 AB。但是, 约翰对试图采用这一过于简单化的方法提出了警告:“……不要草率地作出判断, 虽然直线 AB 的确是连接 A、B 两点的最短线路, 但它却不是所用时间最短的路线。而曲线 AMB 则是大家所熟知的一条曲线。如果在年底之前还没有其他人能够发现这一曲线, 我将公布这条曲线的名称”。

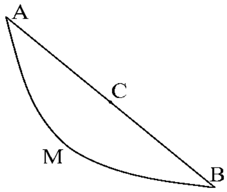

图 1

我们稍微分析一下, 就可知直线 AB 并不是所用时间最短的路线。设 C 是 AB 的中点(图 1), 且假定质点在 A 点的初速为零, 由机械能守恒定律可知, 质点速度与下降高度的平方根成正比, 质点在沿直线滑行的过程中, 将以较小的速度走完 AC、以较大的速度走完 CB 这两段相等的路程, 这当然是不合算的。合理的安排是, 在下降的初

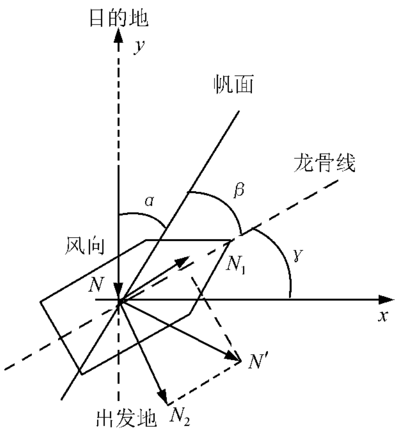

图 5

从图 5 可知, N_1 在 y 轴上的分力 N_y 越大, 风就越快地推动帆船, 现分析如下。$N' = N\sin\alpha$、$N_1 = N'\sin\beta$、$N_y = N'\sin\gamma$, 所以 $N_y = N\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。$N$ 由风决定, 在 $0\sim\pi/2$ 之间, α、β、γ 越大, 则 N_y 越大; $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$ 时, $N_y = N\sin(\pi/2-\beta-\gamma)\sin\beta\sin\gamma$; 所以 N_y 的最大值为一条件极大值问题。极大值在 $\partial N_y/\partial\alpha = \partial N_y/\partial\beta = 0$ 时, 可得

$$-N\sin(\beta+\gamma)\sin\beta\sin\gamma + N\cos(\beta+\gamma)\cos\beta\sin\gamma = 0, \quad ①$$

$$-N\sin(\beta+\gamma)\sin\beta\sin\gamma + N\cos(\beta+\gamma)\sin\beta\cos\gamma = 0。 \quad ②$$

α、β、γ 在极大值时都不为 0, 否则 $N_y = N\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 0$。由①、②两式可化为

$$-\sin(\beta+\gamma)\sin\beta + \cos(\beta+\gamma)\cos\beta = 0, \quad ③$$

$$-\sin(\beta+\gamma)\sin\gamma + \cos(\beta+\gamma)\cos\gamma = 0。 \quad ④$$

由③、④得 $\tan(\beta+\gamma) = \cot\beta = \cot\gamma$。故 $\beta=\gamma$, 代入③式得 $\sin2\beta\sin\beta = \cos2\beta\cos\beta$、$\tan2\beta\tan\beta = 1$, 解得 $\tan^2\beta = 1/3$、$\tan\beta = \sqrt{3}/3$, 故 $\beta = 30°$、$\gamma = 30°$、$\alpha = 30°$。

总之, 当 $\beta=\gamma=\alpha=30°$ 时, N_y 具有最大值, 即保持船头与逆风成 60°, 且帆面恰在船头和逆风的角平分线上, 帆船就能从逆风中获得最大动力, 从而最快到达目的地。 (浙江义乌苏溪中学 322009)

始阶段, 因速度较小, 质点应走较陡的曲线, 使其尽快获得较大的速度; 当质点速度较大时, 再充分利用较大速度走完较平坦的曲线, 以便尽快到达 C 点。

二、问题的解决

约翰原定于 1697 年 1 月 1 日向大众公布答案, 可是到最后期限截止时, 他只收到《教师学报》杂志主编、他的老师莱布尼兹(Gottfriend Wilhelm Leibniz, 1646~ 1716) 寄来的 1 份答案。在莱布尼兹的要求下, 他将最后期限延长至复活节, 以便科学家们有充足的时间来解决这道难题。

“最速降线”问题的困难在于它和以往的极大极小值求法不同, 要求出一个满足所给条件的未知函数(曲线) , 而 17 世纪之前的物理及数学理论对此并未涉及。全欧洲的科学家都被这个别出心裁的挑战和所吸引, 纷纷投入到对该问题的求解中, 因为他们意识到解决这个问题的很可能形成一门全新的理论。而后来的事实也的确证明了这一点。

约翰还在问题中暗示了他所挑战的对象, 他写道:“ ……很少有人能够解出我们独特的问题, 即使那些自称通过特殊方法……不仅深入探究了几何学的秘密、而且还以一种非凡的方式拓展了几何学的疆域的人。这些人自以为其伟大定理无人知晓, 其实早已有人将它们发表过了。”还有谁能怀疑他所说的“定理”就是指流数法, 他所蔑视的目标就是艾萨克• 牛顿呢? 牛顿曾宣称早在莱布尼兹 1684 年发表微积分论文之前就已提出这一理论。而莱布尼兹正是约翰的老师, 约翰以一种惊人的执着支持着莱布尼兹。无疑, 约翰的挑战目标非常明确, 他把最速降线问题抄了一份, 亲自装进信封, 寄往英国。

那时的牛顿正忙于英国造币局的事务, 而且正如他自己所承认的那样, 他的头脑已不似 20 年前全盛时期那样机敏了。当时牛顿与他的外甥女凯瑟琳• 康迪特一起住在伦敦。凯瑟琳记述了这样的故事:“ 1697 年的一天, 收到伯努利寄来的问题时, 艾萨克• 牛顿爵士正在造币局里忙着改铸新币的工作, 很晚才筋疲力尽地回到家里, 但是, 直到解出这道难题, 他才上床休息, 这时, 正是凌晨四点钟。”即使是在晚年, 并且经过一天紧张工作的情况下, 牛顿仍然成功解出了困扰众多欧洲人的难题! 由此可见这位天才的实力。他清楚感觉到其名望与荣誉都受到了挑战; 而且, 伯努利和莱布尼兹毕竟都还在急切地等待着公布他们自己的答案。因此, 牛顿当仁不让, 仅仅用几个小时就解出了这道难题。然而, 牛顿有些被激怒了, 据说他曾言道:“ 在这个问题上, 我不喜欢……给外国人……戏弄。”

很快 1697 年的复活节到了, 约翰一共收到 5 份答案, 其中当然包括他自己的答案和莱布尼兹的答案。他的哥哥雅各布(Jakob Bernoulli, 1654~ 1705) 寄来了第三份答案(这也许会使约翰感到沮丧, 因为兄弟俩都视对方为强劲竞争对手) , 而洛比塔侯爵(Guillaume Francois Antonie de L' Hospital, 1661~ 1704) 则寄来了第四份答案。最后寄来的答案, 信封上盖着英国的邮戳。约翰打开后, 发现答案虽然是匿名的, 但却完全正确。他显然遇到了他的对手牛顿。答案虽然没有署名, 但却明显出自一位绝顶天才之手。据说(或许不尽可靠, 但却非常有趣) , 约翰半是羞恼、半是敬畏地放下这份匿名答案, 说道:“ 我从他的利爪认出了这头狮子。”

于是约翰在当年第 6 期《教师学报》上公布众人的解答, 他们每个人所求得的曲线都是连接 AB 两点的一段上凹旋轮线, 而这的确“ 是几何学家、物理学家所熟知的一条曲线”。我们注意到, 帕斯卡和惠更斯就曾研究过存在于单摆中的这一重要曲线, 但他们谁也没有认识到它还是一条最快的下降曲线。约翰以一种夸张的口吻写道:“ ……如果我明确说出惠更斯的……这一旋轮线就是我们所寻求的最速降线, 你们一定会惊呆了。”

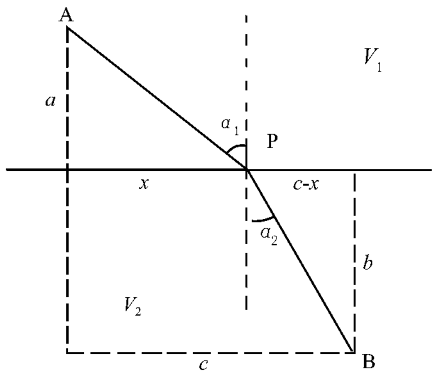

图 2 光线的折射

尽管答案都是旋轮线, 但 5 人的解法却各有千秋。约翰的解法类比了费马原理(Fermat principle) , 巧妙地将物理和几何融合在一起, 用光学方法一下就做出来了, 应该是最漂亮的。而雅可布的解法虽然麻烦、费劲, 却更为一般化, 真正体现了变分思想。牛顿、莱布尼兹、洛比塔等人都是用他们擅长的微积分法, 但具体步骤各不相同。

这里限于篇幅，只对约翰巧妙的物理解法做简要介绍。如图 2 所示，光线以速度 V_1 从 A 点到达 P 点，进入另一媒质以速度 V_2 从 P 点到达 B 点。按图中记号，经过整个路程所用时间为

$$T=\sqrt{a^2+x^2}/V_1+\sqrt{b^2+(c-x)^2}/V_2。\quad(1)$$

若该路程使时间达到最小，即 $dT/dx=0$，得到

$$x/V_1\sqrt{a^2+x^2}=(c-x)/V_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}\quad(2)$$

或

$$\sin\alpha_1/V_1=\sin\alpha_2/V_2。\quad(3)$$

这就是斯涅耳(W. Snell, 1591～1626) 1621 年通过实验发现的折射定律，也是费马原理的例证之一。若光线通过多层媒质，在交界处都满足斯涅耳定律：

$$\frac{\sin\alpha_1}{V_1}=\frac{\sin\alpha_2}{V_2}=\frac{\sin\alpha_3}{V_3}=\frac{\sin\alpha_4}{V_4}=\cdots\quad(4)$$

当各层变得越来越薄而层数越来越多，极限情况下，速度连续变化，光线也连续弯曲(图 3)，如太阳光进入大气层，则满足：

$$\sin\alpha/V=常数。\quad(5)$$

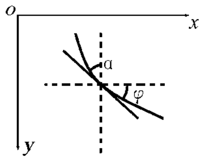

图 3　连续变化媒质中的光线

可以设想，小球从 A 下降到 B 时间最短的路径，同样应该满足公式(5)。

利用能量守恒，小球在不同高度的速度为

$$V=\sqrt{2gy},\quad(6)$$

利用几何关系有

$$\sin\alpha=\cos\varphi=1/\sqrt{1+\tan^2\varphi}=1/\sqrt{1+y'^2},\quad(7)$$

将分别来自光学、力学和数学的公式(5)、(6)、(7)结合起来，可以得到

$$y(1+y'^2)=c\quad(8)$$

这就是最速降线的微分方程。将式(8)改写成

$$dx=\sqrt{y/(c-y)}\,dy。\quad(9)$$

记 $y=c\sin^2\varphi$，则 $dx=c(1-\cos2\varphi)\,d\varphi$，积分后得

$$x=(c/2)(2\varphi-\sin2\varphi)+c_1\quad(10)$$

利用 A 点的边界条件可确定 $c_1=0$。记 $a=c/2$、$\theta=2\varphi$，有

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(\theta-\cos\theta)\end{cases}\quad(11)$$

这就是图 4 所示旋轮线的标准参数方程。曲线是由半径为 a 的圆周上一点在圆沿 x 轴滚动时产生的。当 a 从 0 增大到 ∞时，摆线的第一拱就扫过整个第一象限，因而只要适当选择 a 就可以使之通过点 B。

三、挑战的意义

公开挑战的传统是从 16 世纪意大利米兰市菲奥尔挑战塔尔塔利亚解一元三次方程的公开比赛开始的，而最速降线挑战无疑是最激动人心的一次。

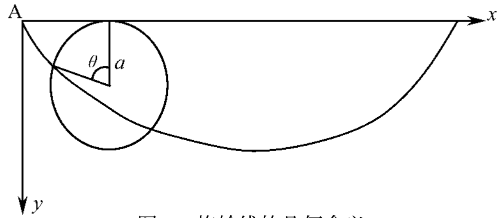

图 4　旋轮线的几何含义

首先是因为参与挑战的人数众多，得出正确结果的人在科学界也都赫赫有名。牛顿、莱布尼兹各自独立地创立了微积分，牛顿还是历史上最伟大的科学家之一；科学世家伯努利家族在数学与物理学领域的地位，正如巴赫家族在音乐领域的地位一样显赫，而伯努利兄弟二人正是其家族的杰出代表——洛比塔年幼时就显露出天才，15 岁时就解答出帕斯卡的摆线难题，1691 年末～1692 年 7 月师从约翰•伯努利学习微积分，其著作《阐明曲线的无穷小分析》(Analyse des Infiniment Petits Pour L'intelligence des Lignes Courbes) 的直观意念来自其导师约翰的洛必达法则，大大降低了微分运算的难度。

其次，这次挑战中各人的解法不尽相同，由于雅可布的解法体现了变分的思想，且更一般化，使约翰的学生——大数学家莱昂哈德•欧拉(Leonhard Euler, 1707～1783) 也开始关注这个问题，并从 1726 年起开始发表相关的论著，于 1744 年最先给了这类问题的普遍解法，最终创立了变分法这一新的数学分支。变分法应用广泛，从肥皂泡到相对论，在诸如力学、电学、空气动力学、最优化控制中都有应用。可以说最速降线问题直接导致了变分学的诞生，这才是这次挑战的最大意义所在。

(长江大学物理科学与技术学院　434023)