对普朗克常数 h 的思考

朱世豹

1900 年普朗克(Planck)为解释黑体幅射的能量-波长实验曲线,提出辐射能量的不连续性概念,即任何能量都是某最小能量的整数倍,而此最小能量中的比例系数便是普朗克常数 h, $h = 6.63 \times 10^{-34}$焦耳 秒(J·s)。物理学为简化公式常用 $\hbar = h/2\pi$, $\hbar$称为约化普朗克常数。h 是微观现象量子特性的表征。h 的提出是对传统物理的划时代挑战,开创了量子力学的新纪元。

常数 h 的推导

19 世纪末,在物理学上空飘起的一朵乌云是黑体(只能吸收而不能反射或透射电磁幅射的物体)辐射能量按波长的分布曲线在整个波段理论计算和实验结果总是不一致。其中维恩导出的公式适合短波部分而瑞利-金斯导出的公式适合长波部分。

为解决此世纪难题,普朗克大胆地提出了两个假设:①能量 ε 只能取离散的值,$\varepsilon = n\varepsilon_0$ 式中 n 为零或任意正整数,ε_0 为有限(最小)能量值,称为能量量子;②能量量子 ε_0 与谐振子的频率 ν 成正比,$\varepsilon_0 = h\nu$, h 是物理学的普适常数之一,称为普朗克常数,又称作用量子。据此,普朗克从玻尔兹曼分布函数 $e^{-\varepsilon/kT}$求得谐振子的平均能量 $\bar{\varepsilon}$(公式略),代入能量密度谱分布式 $\rho(\lambda) = 8\pi\bar{\varepsilon}/\lambda^4$ 之中,获得普朗克黑体幅射公式

$$\rho(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \tag{1}$$

式中 c、λ、ν 分别为电磁幅射的光速、波长、频率,k 为玻尔兹曼常数,T 为温度。黑体幅射的实验测定值完全符合普朗克公式。

解出普朗克常数 h 的方法如下:对式(1)取极值可得

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{4.965k} = b, \tag{2}$$

式中 b 为维恩常数,由实验确定;对式(1)取积分并应用斯特藩定律可得

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15}\frac{k^4}{h^3c^2}, \tag{3}$$

式中 σ 为斯特藩-玻尔兹曼常数,由实验确定。联立式②与式③可解出 $h = 6.55 \times 10^{-34}$J·s 及 $k = 1.346 \times 10^{-23}$J·K^{-1},均与现代测量值十分接近。

h 的广泛应用

普朗克常数 h 刚一问世,物理学家经过短暂的震惊,很快接受下来,并用它解释多方面的物理现象。

1905 年爱因斯坦将普朗克的革命思想推向纵深,他把能量谐振子概念扩大至电磁场本身,认为电磁场是量子化的,认为光由称为光子的粒子组成,光子的能量

$$E = h\nu。 \tag{4}$$

光子假说成功地解释了光电效应,爱因斯坦因此获得诺贝尔奖。但爱因斯坦的光子说却曾一度被普朗克本人拒绝过。

1913 年玻尔(Bohr)用原子能量量子化概念成功地解释了原子的线状光谱。氢原子的能级公式为

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\frac{1}{n^2}, \tag{5}$$

式中 n 为正整数,ε_0 为真空电容率,e 为电子电荷,m_e为电子质量,玻尔氢原子模型中的玻尔半径 $r_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = 0.529$Å,玻尔磁子 $\mu_B = \frac{he}{4\pi m_e}$。

1924 年德布罗意(De Broglie)提出物质波假设:一个动量为 P、能量为 E 的自由运动的粒子,反过来也相当一个波长为 $\lambda = h/p$、频率为 $\nu = E/h$ 的平面波。德布罗意波后来被戴维森和盖末的电子衍射实验所证实,为量子力学的建立奠定了基础。

1926 年薛定谔(Schrödinger)由理论构思出描述粒子波粒二象性行为的薛定谔方程

$$-\frac{h}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Psi(\mathrm{r}, t) + V\psi(\mathrm{r}, t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{r}, t), \tag{6}$$

式中 r 为粒子的位置矢量、t 为时间、m 为粒子质量、Ψ 为波函数(是复数)、V 为势能、i 为虚数单位,引入 i 是为了使 $\hbar$为实数。这是对空间为二阶导数、对时间为一阶导数的方程,其解均符合实验结果。但因其求解困难,至今只能用于一些典型问题。

1927 年海森堡(Heisenberg)提出著名的不确定

(测不准)关系

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h; \qquad (7-1)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h。\qquad (7-2)$$

式中 Δx 与 Δp 分别为位置及动量不确定量;ΔE 与 Δt 分别为能量及时间的不确定量。海森堡关系给出任何实验能够给出的最小测不准量。

应用 h 作为最小值限制着上述的不确定关系,我们容易获得原子、原子核、粒子物理三个领域中的空间尺度和能量尺度关系。对原子物理和凝聚态物理,空间尺度为 Å,能量尺度为 1～10eV;对原子核物理,空间尺度为 $(1 \sim 6.5) \times 10^{-15}$m,能量尺度为 0.5M～2.0MeV;粒子物理,空间尺度 $\leq 10^{-16}$m,能量尺度 $\geq$1 GeV,真可谓小空间高能量!

h 或 $\hbar$ 还出现于下列物理学公式之中:

●微观系统简谐振子的振动能级公式 $E = (n + 1/2)h\nu$,式中 ν 为振动固有频率,$n = 1, 2, 3, \cdots$

●分子的转动能级公式 $E = \dfrac{h^2 J(J+1)}{8\pi^2 I}$,式中 I 为转动惯量,$J = 0, 1, 2, \cdots$

●电子运动的动量矩 $p = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$,式中 $\ell = 0, 1, 2, \cdots, n-1$,称为角量子数。

●微观粒子的自旋动量矩 $S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar$,对电子 $s = 1/2$。

●塞曼效应显示原子能级在磁场中的分裂,其波长改变量 $\Delta\lambda = \lambda^2 \mu_B B/hc$,式中 λ 为波长、μ_B 为玻尔磁子、B 为磁感应强度。

●精细结构常数 α 起因于电子轨道磁矩与其自旋磁矩的相互作用(形成两相邻谱线间的波长差约为 1Å),又称电磁作用的耦合强度,$\alpha = e^2/4\pi\hbar c = 1/137$,其中 e 为电子电荷、c 为光速。137 对泡利(Pauli)是个特殊的数字,据说在他去世前一天,他要前来看望他的朋友注意,他的病房号码是 137!

●在超导现象中,超导环中的磁通 Φ 是量子化的,它最小单位为 $hc/2e$。

●超导电流密度 $j = q\rho(\hbar\nabla\theta - qA/c)/\mu$,式中 q 为玻色子电荷、μ 为其有效质量、ρ 为库柏对的密度、$\nabla\theta$ 为梯度、A 为矢势。

●量子力学认为,用场强(电场强度 E 和磁通密度 B)已不能完全描述可观测的微观电磁现象,这种电磁现象应是不可积相因子 $\exp[ie\oint(-\phi\,dt + A\cdot dx)/\hbar c]$ 的规范不变的表现,式中 i 为虚数单位、e 为电子电荷、ϕ 为粒子相位、A 为矢势、c 为光速。

●1962 年,年仅 22 岁的约瑟夫森提出超导体-氧化物-超导体结(后来称为约瑟夫森结),通过此结的电流 $i = i_e\sin[\delta(0) - 2eVt/\hbar]$。式中 i_e 为能通过结的最大零电压电流;$\delta(0)$ 为电场等于 0 时两侧电子对的相位差;V 为结两侧的直流电压。约瑟夫森结的重要特性是,电子对在穿过结时,会伴随能量为 $h\nu = 2eV$ 的光子的吸收或发射,而通过测量直流电压和交流频率,可以得到非常精确的 $e/\hbar$ 数值,即可得到精确的约化普朗克常数 $\hbar$。

对 h 的几点思考

围绕普朗常数 h 的起源、内涵和外延,可展开下列几点思考。

h 依据的自然规律是什么 h 是量子世界中的一个比例系数(能量与频率之比,见式(4)),它依据的自然规律应该是微观粒子(电子、光子等)的波粒二象性,因为波粒二象性是微观现象的基本特征。h 起因于黑体幅射,而电磁幅射既是波又是粒子;因此 h 使频率、波长等波参数与能量、动量等动力学参数联结在一起;由此看出,h 的物理基础是坚实的、应用是广泛的。

h 适用于物质世界的哪些领域 简言之,h 适用于微观量子世界。习惯的说法是,当 $\hbar \to 0$,量子力学过渡到经典力学,微观世界过渡到宏观世界。实际上,$\hbar$ 是常数,因此 $\hbar \to 0$ 的含义是指时空、动力学参数与 $\hbar$ 相比足够大!从式(7-1)可看出 $\hbar \to 0$,即 $\hbar \ll X \cdot P$,式中 X 为物体的空间尺度、P 为动量;而 P 足够大意味着物体的质量与速度乘积足够大,只要速度不为 0(非静止物体),宏观物体 P 足够大容易满足。同理,从式(7-2)看出,$\hbar \to 0$,即 $\hbar \ll Et$,式中 E 为能量、t 为时间(测量时间、"存在"时间如寿命等)。

因此,h 适用的领域的特征可以归结为尺度与动量乘积小,或者能量与时间乘积小。在用 X 表示横坐标,P 表示纵坐标的平面图上,h 适用的范畴为靠近坐标原点的面积不大于 $\hbar$ 的区域(X 或 P 的值可相互调节)。

为什么在宏观的经典物理学范围内,h 的作用会被忽略掉? 其原因是,与宏观的能量相对应的量子数 n 具有非常大的值,每份量子能量与总能量的比值又非常小。例如一个质量为 1kg 的弹簧谐振子,$n = E/h\nu \approx 10^{30}$,而系统能量相对改变量 $\Delta E/E = h\nu/nh\nu \approx 10^{-30}$。

迄今为止,我们还没有量子力学和经典力学、微观世界和宏观世界之间明确的分界线,现实世界中存在不少处于上述两者之间的边缘问题。例如,团簇物理中物质所含的原子或分子数目可以从三个到上万个,其空间尺度可以从几个 Å 到几纳米。列举生物大分子的几个有趣数据:蛋白质和核酸的分子量达 10^3～10^{12} 道尔顿①,基团长度可从 2000～200 万碱基对②,DNA 复制迅速,如大肠杆菌的复制速率为 1700 碱基对/秒。这些问题中,h 的作用是否显著,只有具体问题作具体分析。

h 与哪些自然常数(测量值)有关 由式(2)及式(3)知,h 与光速、玻尔兹曼常数、维恩常数 b、斯特藩-玻尔兹曼常数 σ 有关。由精细结构常数 α 的公式知,h 与光速、电子电荷 e 及 $\alpha = 1/137$ 有关;由通过约瑟夫森结电流的公式知 h 与直流电压、交流频率等有关。总而言之,h 与光、电、磁、热、电磁幅射等物理现象的常数和参数有关,因此它具有普适性。

h 会引发对信息和数学的重新审视 h 的存在,意味着微观世界的本质是数字的。例如,能量就是一份一份的,每一份的存在与否可用 1 或 0 表示。如果说宏观世界是微观世界的"叠加",那么宏观世界也应该是数字化的。在现代电子技术和自动控制技术中,尽管数字逻辑电路的应用日趋广泛,但传统的认识是,我们的客观世界是连续的、模拟的,数字仅限作中间运算或控制,即是模—数—模的三段式。

值得一提的是近几年兴起的量子信息论。一个纯量子态中各叠加成分的系数模型、内部相因子和纠缠模式都可以荷载人们设定的信息。量子信息主要有以下特点:叠加性、相干性、塌缩性(非定域性等)、不可克隆性(信息态被精确克隆的概率不会是 100 %等)及纠缠性(某些量子位可不处于确定的量子态上)。量子信息可取的状态为 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$,可构成触发器电子线路也可形成光子极化状态或电子(或原子核)的自旋状态。

笔者认为,h 的存在应该使我们对传统数学的重要组成部分——微积分有重新审视的必要。在微观世界中,只有"有限小"(或者 0)而没有无穷小,这样运用极限概念就会产生差错,积分运算必须用求和代替,微分运算要作具体分析,微分方程是不能任意使用的。

h 还涉及哪些"世界之最" 我们这个世界,最大的和最小的往往有着共同的规律。在宇宙学、热爆炸宇宙模型、超弦等新兴的领域中,常常可见 h 的"踪影",典型的是普朗克质量、时间和长度。

普朗克质量 $m_p = (\hbar c/G)^{1/2} \approx 2.18 \times 10^{-8}$ kg。式中 G 为引力常数、c 为光速。m_p 的物理意义之一是,使史瓦西半径(爱因斯坦场方程的第一个精确解)与康普顿波长相等的那个质量。在 $c = \hbar = 1$ 单位制中,$G = m_p^{-2}$。

普朗克时间 $t_p = (\hbar G/c^5)^{1/2} \approx 5.39 \times 10^{-44}$ s。一般认为这是最小的时间间隔,也是宇宙中"最早"的时刻,宇宙大爆炸后的这一时刻产生时间、空间和巨大数量的粒子。

普朗克长度 $l_p = t_p/c = 1.62 \times 10^{-35}$ m,l_p 是超微小的宇宙尺度,几千个 l_p 才能达到经典时空尺度。l_p 也是超弦理论中假设的弦长度。

综上所述,普朗克常数 h 是系数(能量与频率之比),是桥梁(联系坐标与动量或能量与时间等),是标度(普朗克长度等),是媒体(与那么多的常数和定律有关),是分水岭($\hbar \to 0$ 过渡到经典力学)。

一个多世纪以来,普朗克常数 h 犹如一颗耀眼的明珠,点缀着量子力学的辉煌。迄今为止,量子力学接受了因果论的挑战,经历了完备性的检验,显示了"上帝"在掷骰子的现实。当然,人对自然的认识总是在深化在发展,对量子力学和 h 常数也不会例外。让我们重温量子力学创始人之一狄拉克(Dirac)的名言:"它(量子力学)是到现在为止人们能够给出的最好的理论,然而不应该认为它能永远地存在下去……"。

(江苏苏州市彩香一村二区 19—30　3215004)

①表示分子量,等于分子质量与原子质量单位($\mu \approx 1.66 \times 10^{-27}$ kg)的比值。
②DNA 分子梯状结构中的阶梯横木,两个碱基对间距的平均值约为 0.2 纳米。