

探究雨滴的形成与运动

——解析北京高考理科综合能力测试卷 24 题

岳守凯



从天空坠落的雨滴是否吸引过你的视线？当你伸出双手时，你是否感受到雨滴轻轻地落到你的手心？你是否知道这雨滴是从两千多米的高空坠落？如果不考虑空气的影响，由自由落体规律可以得出其落地速度超过 200m/s，就像一梭子弹射向地面，人如何承受？人们不禁要问：雨滴是如何形成的？在空气阻力作用下的雨滴以什么规律运动？落地速度有多大？

首先谈谈雨滴是如何形成的？雨滴是由云“变”来的。雨滴的体积是云滴体积的 100 万倍。也就是说，要 100 万个云滴才能构成一个雨滴。在湿空气中，因冷却而凝结出云滴。对于云体温度高于 0°C 的暖云来说，云中存在大小不同的云滴，大云滴下降速度快，上升速度慢；小云滴下降速度慢，上升速度快。于是，由于大小云滴相对速度的差异，使得大云滴有机会与小云滴相撞，结果小云滴就合并到大云滴中去了。这样，大云滴不断地增大，又因为上升气流分布不均匀，大云滴可以在云中多次上下运动，再加上云内的湍流作用，大云滴增大的机会就增加，于是大云滴越来越大，直到上升气流托不住它，掉下来成为雨滴。

2010 年北京高考理科综合能力测试卷 24 题把雨滴的形成过程简化为以下的模型，并对其形成的规律进行如下初步的探讨。

雨滴（指大云滴）在穿过云层的过程中，不断与漂浮在云层中的小水珠（小云滴）相遇并结合为一体，其质量逐渐增大。现将上述过程简化为沿竖直方向的一系列碰撞。已知雨滴的初始质量为 m_0 ，初速度为 v_0 ，下降距离 l 后与静止的小水珠碰撞且合并，质量变为 m_1 。此后每经过同样的距离 l 后，雨滴均与静止的小水珠碰撞且合并，质量依次变为 m_2 、 m_3 …… m_n ……（设各质量为已知量）。不计空气阻力。

(1) 若不计重力，求第 n 次碰撞后雨滴的速度 v_n' ；

(2) 若考虑重力的影响，a. 求第 1 次碰撞前、后雨滴的速度 v_1 和 v_1' ；b. 求第 n 次碰撞后雨滴的动能

$$\frac{1}{2}m_n v_n'^2。$$

解：(1) 若不计重力，则

$$m_0 v_0 = m_n v_n', \quad v_n' = \frac{m_0}{m_n} v_0。$$

(2) 若考虑重力的影响，

a. 第 1 次碰撞前 $\frac{1}{2}m_0 v_1^2 - \frac{1}{2}m_0 v_0^2 = m_0 gl$,

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gl, \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gl};$$

第 1 次碰撞后

$$m_0 v_1 = m_1 v_1', \quad v_1' = \frac{m_0}{m_1} v_1 = \frac{m_0}{m_1} \sqrt{v_0^2 + 2gl}。 \quad (1)$$

b. 第 2 次碰撞前 $\frac{1}{2}m_1 v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 gl$,

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gl。$$

利用 (1) 得：

$$v_2^2 = \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^2 v_0^2 + \left(\frac{m_0^2 + m_1^2}{m_1^2}\right) 2gl, \quad (2)$$

第 2 次碰撞后，利用 (2) 得

$$v_2'^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_2^2 = \left(\frac{m_0}{m_2}\right)^2 v_0^2 + \left(\frac{m_0^2 + m_1^2}{m_2^2}\right) 2gl。$$

同理，第 3 次碰撞后

$$v_3'^2 = \left(\frac{m_0}{m_3}\right)^2 v_0^2 + \left(\frac{m_0^2 + m_1^2 + m_2^2}{m_3^2}\right) 2gl。$$

第 n 次碰撞后

$$v_n'^2 = \left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2 v_0^2 + \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i^2}{m_n^2}\right) 2gl,$$

$$E_{Kn} = \frac{1}{2}m_n v_n'^2 = \frac{1}{2}m_n \left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2 v_0^2 + m_n \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i^2}{m_n^2}\right) gl$$

当大云滴的质量与动能增大到一定程度，气流托不住它，雨滴就形成了。

雨滴形成后，在下落过程受到空气阻力作用，经实验观察测得：雨点的落地速度与雨点的大小有关。一般而言，毛毛雨（直径 0.5mm）的雨点落地速度为 2 米/秒，而暴雨（雨滴最大直径 5.5mm 左右）的雨点最大落地速度为 9 米/秒。由于雨滴的速度很小，所以雨滴受到的空气阻力与速度的一次方成正比。（关于空气阻力，当物体速度很小时，与速度的一次方成正比；当速度足够大时才与二次方成正比。）

下面来推导雨滴下落过程的运动规律。

在无风的情况下，一滴质量为 m 的雨滴由初速度 v_0 开始在竖直方向自由下落。求其运动过程的加速度、速度、位移随时间变化的规律是什么？（雨滴在运动过程中的质量变化忽略不计）

解：雨滴受空气阻力 $f=kv$ ，对雨点进行受力分析得： $mg-kv=ma$ ，

$$-k \frac{dv}{dt} = m \frac{da}{dt}, \quad -\frac{k}{m} dt = \frac{1}{a} da。$$

当 $t=0$ 时， $a=g$ ，

$$-\int_0^t \frac{k}{m} dt = \int_g^a \frac{1}{a} da, \quad -\frac{k}{m} t = \ln \frac{a}{g},$$

$$a = ge^{-\frac{k}{m}t}, \quad dv = ge^{-\frac{k}{m}t} dt,$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t ge^{-\frac{k}{m}t} dt,$$

$$v = v_0 + \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right),$$

$$dx = v_0 dt + \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) dt,$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) dt,$$

$$x = v_0 t + \frac{mgt}{k} + \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right)。$$

雨滴下落过程的加速度、速度、位移分别与时间成指数函数规律变化。由函数关系可知雨滴作加速度逐渐减小的加速运动，当加速度减为零时，速度达到最大，这个速度叫收尾速度，也是指雨滴在空气中的下降末速度。雨滴大小不同，收尾速度也不同，雨滴质量越大，收尾速度越大，收尾速度在 2~9m/s 之间。

2010 年北京高考理科综合能力测试卷 24 题的命题视角独到，立意新颖。对于雨滴的形成过程，问题情境虽然比较复杂，但经过巧妙地简化与抽象，既使物理模型与实际情况基本相符，又便于学生运用高中物理相关的规律解决问题。本题考查的是完全非弹性碰撞与能量的问题，是根据前几项进行演绎推理，推出通项。物理过程也比较容易分析，碰撞问题在高一阶段就研究过，应该怎么列方程，学生能想到应用动量守恒和动能定理，分析如何应用这两个物理规律解题也是比较常规的。

本题是一道考查学生解决物理问题能力的好题。如果能对雨滴的运动过程进一步作定性或定量探讨（不超越高中物理课程标准），使呈现的问题更加系统、完整，就便于学生更加全面地认识雨滴的形成与运动的规律。这个想法权当抛砖引玉，以待商榷。

（江苏省沭阳县修远中学 223600）



科苑快讯

恐龙骨骼上竟发现哺乳动物的啃咬痕迹

美国康涅狄格州纽黑文市耶鲁大学古脊椎动物学家朗里奇（Nicholas Longrich）在整理大学和博物馆的一些化石时，发现恐龙的骨骼化石上留有啮齿动物啃咬的痕迹。这些化石的年代在 7500 万年前，正好接近恐龙时代末期。它们出土自加拿大西部的亚伯达省，当时这里是西部内陆海道（Western Interior Seaway，亦称白垩纪海道，这片广阔的海洋曾把北美洲一分为二）的西部边缘，气候温暖、环境适宜，有鸟类、翼手龙、

乌龟、短吻鳄、蜥蜴及各种哺乳动物在此栖息。

有啃咬痕迹的骨头，一块像三角龙或鸭嘴龙的大肋骨、一块像鸟臀目恐龙的股骨，还有一块鳄龙的股骨、一块始负鼠（一种小型有袋类动物，已灭绝）的下颌骨上也发现了类似痕迹。这些痕迹长 4~7 毫米、宽 1 毫米，属于一种松鼠大小的哺乳动物。经过仔细研究分析后，专家们认为这是称为多尖齿兽的一类已灭绝的啮齿动物，啃咬方式明显有别于现在的啮齿动物。在它们啃咬恐龙骨时，上面的肉其实已经不存在，它们很可能是为了补充必要的营养才去啃这些骨头的。

（高凌云编译自 2010 年 6 月 24 日雅虎新闻）