



万物之数 太阳质量

章德海

我们可以把宇宙中的万事万物放入“万物图”中，但是这万事万物主要是被什么因素决定的呢？格局是被基本物理规律决定的，而相互的数量关系是被基本物理常数决定的。基本物理常数是分层次的。从比较表层的现象看，最重要的基本物理常数有 5 个，它们是宇宙哈勃常数 H_0 、核子质量 m_n 、电磁相互作用常数 α 、电子质量 m_e 、 π

介子质量 m_π 。万事万物与基本物理常数之间的关系初看起来并不明显，但仔细思考一下，这些关系在基本层面上看却相当明确。我们必须确切列举出许多重要物理量与基本物理常数之间的关系，才能看清楚基本物理常数所起的作用，并探讨万事万物彼此之间的关系和与基本物理常数之间的内在联系。为此我们初步研究了约 27 个重要的物理量，已经推导出了用这 5 个主要基本物理常数表达它们的公式，列举在表 1 中。

表 1 某些重要物理量与基本物理常数之间可能的关系表

名称	符号	公式 (普朗克标度)	带入 $\beta_{(9)}$ 后	计算值	准确值	误差	备注或推导理由。
原子半径	R_{atom}	$\alpha^{-1} m_e^{-1}$	无 β 同左	0.529 Å	0.529 Å	等同	标准公式
原子能级	$ E_{\text{atom}} $	$\alpha^2 m_e / 2$	无 β 同左	13.6eV	13.6eV	等同	标准公式
原子密度	ρ_{atom}	$m_n \alpha^3 m_e^3 / 4$	无 β 同左	$2.82 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$		/	$m_n / V, V = 4R_{\text{atom}}^3$
地球平均密度	ρ_{er}	$2\rho_{\text{atom}}$ (注 1)	$m_n \alpha^3 m_e^3 / 2$	$5.64 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	$5.52 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	+2%	估算。注 1: 无 β
太阳平均密度	ρ_{sun}	$2\rho_{\text{atom}}$ (注 1)	$m_n \alpha^3 m_e^3 / 8$	$1.41 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	$1.41 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	+0%	估算。注 1: 无 β
太阳质量	M_{sun}	$m_n^{-2} / 2$	无 β 同左	$1.84 \times 10^{33} \text{g}$	$1.99 \times 10^{33} \text{g}$	-7%	质子简并压强
太阳半径	R_{sun}	$(M_{\text{sun}} / 4\rho_{\text{sun}})^{1/3}$	$\alpha^{-1} m_e^{-1} m_n^{-1}$	$6.89 \times 10^5 \text{km}$	$6.96 \times 10^5 \text{km}$	-1%	直接
普适缩减因子	β	$\alpha^{2/3}$	无 β 同左	0.0376		/	奇怪地普适
恒星总数	N_{sun}	$\beta m_n^2 / H_0$	$\alpha^{2/3} m_n^2 / H_0$	2.19×10^{21}	(10^{22} ?)	~	宇宙总质量
恒星平均距离	d_{sun}	$H_0^{-1} N_{\text{sun}}^{-1/3}$	略	~ 1000ly		/	星系内 $d_{\text{sun}} \sim 10 \text{ly}$
化学能 (=T)	E_{ch}	$\beta \alpha^2 m_e / 2$	$\alpha^{8/3} m_e / 2$	5940K	5770K (注 2)	+3%	注 2: 太阳表面温度 T
地球质量	M_{ear}	$(\beta \alpha / 2)^{3/2} m_n^{-2}$	$2^{-3/2} \alpha^{5/2} m_n^{-2}$	$5.93 \times 10^{27} \text{g}$	$5.98 \times 10^{27} \text{g}$	-1%	$GM_{\text{earth}} m_n / r = E_{\text{ch}}$
地球半径	R_{ear}	$(M_{\text{ear}} / 4\rho_{\text{ear}})^{1/3}$	$2^{-5/6} \alpha^{-1/6} m_e^{-1} m_n^{-1}$	6403km	6371km	+1%	直接
太阳地球质量比	$r_{s/c}$	$2^{1/2} (\beta \alpha)^{-3/2}$	$2^{1/2} \alpha^{-5/2}$	3.11×10^5	3.33×10^5	-7%	$M_{\text{sun}} / M_{\text{earth}}$
元素数	N_{el}	$(\alpha^{-1} m_n m_e^{-1})^{3/2}$	无 β 同左	87	(稳定 92)	~	强吸力与电斥力
太阳核效率	γ_{sun}	β^2	$\alpha^{4/3}$	0.0014	(0.001)	~	因素复杂
超新星杀伤半径	d_r	因素复杂	?	~ 1ly		/	与物质交流半径相关
太阳亮度	L_{sun}	$\beta^4 \alpha^6 m_e^2 m_n^{-2} / 8$	$\alpha^{26/3} m_e^2 m_n^{-2} / 8$	$4.07 \times 10^{26} \text{W}$	$3.83 \times 10^{26} \text{W}$	+6%	$ST^4 / 6, S = 4\pi R_{\text{sun}}^2$
太阳寿命	τ_{ch}	$2\beta^{-2} \alpha^{-6} m_e^{-2}$	$2\alpha^{-22/3} m_e^{-2}$	9.13Gyr	(10Gyr?)	~	$(\gamma_{\text{sun}} / 2) M_{\text{sun}} / L_{\text{sun}}$
地球年龄	τ_{earth}	$\tau_{\text{ch}} / 2$	$\alpha^{-22/3} m_e^{-2}$	4.56Gyr	4.60Gyr	-1%	估算
太阳爱丁顿寿命	τ_{Edd}	$\alpha^2 m_n^{-1} m_e^{-2} / 2$	无 β 同左	0.34Gyr		/	电子截面
爱丁顿亮度	L_{Edd}	$\alpha^{-2} m_n^{-1} m_e^2$	无 β 同左	$1.94 \times 10^{30} \text{W}$	$3.83 \times 10^{26} \text{W}$	5073	比太阳亮度大太多
质子质量	m_n	$\beta \alpha^8 / 4$	$\alpha^{26/3} / 4$	0.923GeV	0.938GeV	-2%	$\tau_{\text{Edd}} = \beta \tau_{\text{ch}} ?$
最佳核反应温度	T_{best}	$5\alpha^2 m_n$	无 β 同左	$2.90 \times 10^9 \text{K}$		/	隧穿与热谱
太阳中心温度	T_{cent}	$5\beta^2 \alpha^2 m_n$	$5\alpha^{10/3} m_n$	$4.10 \times 10^6 \text{K}$	(10^7K ?)	~	$T_{\text{cent}} = \beta^2 T_{\text{best}}$
太阳表面温度 2	T_{sur}	$5\beta^4 \alpha^2 m_n$	$5\alpha^{14/3} m_n$	5806K	5770K	+1%	$T_{\text{sur}} = \beta^2 T_{\text{cent}}$
电子质量	m_e	$10\beta^3 m_n$	$10\alpha^2 m_n$	0.500MeV	0.511MeV	-2%	$T_{\text{sur}} = E_{\text{ch}}$

现在让我们首先解释一下这张表。这张表的公式和参数数值，都是以普朗克标度为单位的。正如第一文中解释的，普朗克单位制如下：普朗克质量 $m_{\text{pl}} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} = 2.18 \times 10^{-5} \text{ g}$ 、普朗克长度 $l_{\text{pl}} = 1.62 \times 10^{-33} \text{ cm}$ 、普朗克时间 $t_{\text{pl}} = 0.539 \times 10^{-43} \text{ sec}$ 。用 GeV 为单位的核子质量是 $\tilde{m}_n = 0.938 \text{ GeV}$ ，当用普朗克单位表达它时，就成为 $m_n = \tilde{m}_n / m_{\text{pl}} = 0.700 \times 10^{-19}$ ，一个看上去像无量纲的数值。电子质量本来是 $\tilde{m}_e = 0.511 \text{ MeV}$ 也变成了 $m_e = \tilde{m}_e / m_{\text{pl}} = 4.19 \times 10^{-23}$ 。精细结构常数本来就是无量纲的 $\alpha = 1/137$ ，在普朗克单位制中不变。这三个基本物理常数是宇宙中最关键的参数。往后我们会看到陆续还有一些重要基本物理参数参与进来，例如哈勃常数 $\tilde{H}_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} / \text{Mpc}$ （第一文中已有解释），它换算到普朗克单位制中为 $\tilde{H}_0 \sim 10^{-61}$ 。表中引入了一个关键参数，取名为“普适缩减因子” $\beta = \alpha^{2/3}$ ，它可能与精细结构常数相关，我们将逐步解释它的起源和作用。有了这 5 个参数后，宇宙中相当重要的一些物理对象的物理参数都可以表达为它们的简单公式。注意在这些简单公式中，常系数仅仅是个不大于 10 的整数（或其倒数），关于 β 的幂次也仅仅是些小的整数。这充分说明这些公式的简洁性和神秘性。在刚才引入的普朗克单位制中用这些简单公式计算出的值当然仍在普朗克单位制中，但要经过适当且比较简单的单位转换才能变为我们习惯的单位制。以爱丁顿亮度为例，如果推得它的公式为 $\alpha^{-2} m_n^{-1} m_e^2$ ，那么在普朗克单位制中计算的量级为 $10^{4+19-45} = 10^{-22}$ ，其单位是普朗克功率。做出换算 $m_{\text{pl}} \sim 10^{19} \text{ GeV} \sim 10^{16} \text{ erg} \sim 10^9 \text{ J}$ ，普朗克功率为 $m_{\text{pl}} / T_{\text{pl}} \sim 10^9 \text{ J} / 10^{-43} \text{ sec} \sim 10^{52} \text{ W}$ ，这大概是宇宙中能出现的单天体最大功率。全宇宙内最强大的伽马射线爆也不可能超过此极限，只能远低于此值。于是 10^{-22} 个普朗克功率约为 10^{30} 瓦，即表中该栏列举数值的量级。有了这样的计算能力后，我们可对所有要考查的这些物理量作出计算，发现在可与真实物理值作比较的情况下，计算值与实际值符合得出乎意料地好，最大误差不超过 7%，有的不到 1%。考虑到公式的简洁性，这实在令人惊叹！

不过，如果不能说明获得这些公式的一定理由，那么这张表可能并不代表有什么深刻意义的东西。相反，如果我们能够给出一定的物理根据和简洁的物理考虑，合理推导出这些公式，那么我们会感到

有些震惊，需要重视其中可能蕴涵的重要物理意义和关联！但是这给我们设定了一个不大不小的任务，逐个考查每个公式的合理性和意义。当然可能有人认这里给出的推导理由可能比较合理，有人认不够合理，这可能会形成一个争论和探讨的局面，这没有什么不好，这正是科学要追求的目标。

首先是关于原子半径和原子能级的标准公式，这是量子力学给出的，不过我们能比较原始但非常简洁的方式再得一遍这些结果。电子围绕着质子旋转，总能量由电子动能和静电势能合成 $E = p^2 / 2m_e - \alpha / r$ 。由于动量和位置有量子测不准关系 $pr = \hbar$ （在普朗克单位制中 $\hbar = 1$ ），于是 $E = r^{-2} / 2m_e - \alpha r^{-1} = (r^{-1} - \alpha m_e)^2 / 2m_e - \alpha m_e / 2$ 。取极值得原子半径为 $R_{\text{atom}} = \alpha^{-1} m_e^{-1}$ ，原子能级为 $E_{\text{atom}} = -\alpha^2 m_e / 2$ 。当然这只是氢原子 1s 基态的半径和能级。世界上那么多原子那么多能级，肯定不是这个简单公式所表达得了的，这是专门学科原子物理、凝聚态物理具体研究的对象。但是完全可以把刚才这两个表达式作为原子的典型半径和能级。如果就用这个半径去计算所谓“原子密度” $\rho_{\text{atom}} = m_n / 4R_{\text{atom}}^3$ （往后我们都假定有近似 $\pi = 3$ ，可避免繁琐系数），其值为 $2.82 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 。有趣的是它的一半正好是太阳平均密度 $1.41 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ，它的 1 倍正好大约是地球平均密度 $5.52 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ （误差 2%），这是多么巧合的事情！往后我们还要遇到许多巧合，对待这些巧合我们既不能太认真、也不能不认真。它也许反映了事物的某种本质，使我们能简洁地把握住宇宙中万物的大局。有些巧合背后蕴含着深刻联系，观察出某种巧合本身也是研究的重要一环。仔细想想，刚才的巧合并不是一件太大的事，因为地球和太阳都是原子构成的，它们的密度肯定可用原子密度来表达。只是地球是固态，密度要高一点；太阳是气态，密度要低一点。用基本物理常数表达时，这些案例的系数刚好特别简单而已。

表 1 中下一个最值得重视的量是太阳质量。太阳只不过是千千万万个恒星中的“普通”一员，而恒星的质量有大有小，小的可到太阳质量的 1/10，大的可到太阳质量的 100 倍。决定青年、壮年恒星质量的因素是多种的，但是决定晚年、垂死恒星质量的因素却可能变得单纯起来。大质量恒星最终会塌缩成黑洞，中小质量的恒星最终演化为简并星。简并星包括中子星和白矮星，其质量就不像恒星质

量那样分散了，非常有趣的是，它们都正好和太阳质量基本相等，这就是我们上文说到的太阳质量横线。这是太阳质量一个很特殊的性质。由于简并星质量可用比较简单的道理推出，现在让我们来推导一下，这对我们理解太阳质量很有帮助。

简并星的原理在于星体的重力要与压强平衡。一方面压力等于压强差乘以面积 $F = SdP$ ，另一方面重力是万有引力，它等于 $F = -GM\Delta m/r^2$ 。其中 Δm 是受到压力的物质球层质量，它等于密度乘以体积 $\Delta m = \rho dV$ ，而体积等于面积乘以高度差 $dV = Sdr$ 。把这些量都放到一起，让两个力相等并消去面积，于是得到 $dp/dr = -GM\rho/r^2$ 。如果密度不随半径变化，积分后就有 $P = GM\rho/r$ （在普朗克单位制中 $G = 1$ ）。由于半径可以用质量和密度表达为 $r = (M/4\rho)^{1/3}$ ，代入后得压强为 $P = 4^{1/3}M^{2/3}\rho^{4/3}$ 。这个压强是由什么东西提供的呢？这就是粒子简并压强。设每个粒子有动量 p ，由测不准关系每个粒子占据边长为 $d = p^{-1}$ 的立方体体积，密度为 $\rho = m_n d^{-3}$ ，反解得 $d = (m_n/\rho)^{1/3}$ 。在极端相对论情况下粒子简并压强等于动量除以单个电子简并体积 $P = p/d^3 = d^{-4} = (\rho/m_n)^{4/3}$ 。将此简并压强与刚才的重力压强相等，消去密度得 $4^{1/3}M^{2/3} = m_n^{-4/3}$ ，变形之后就得到需要的关系 $M_{\text{sun}} = m_n^{-2}/2$ 。没有系数的公式 $M_{\text{star}} = m_n^{-2}$ 早在 1932 年就被苏联物理学家朗道所推出，它大约是白矮星的极限质量。有趣的是，通过以上简单推导，我们找出了个系数 1/2，用这个有系数的公式刚好可以给出太阳质量，误差仅 7%，是相当小的。没有这个系数，算出的质量若要与太阳质量对比，误差将高达 85%，是刚才误差的 12 倍。当然我们不能对刚才的推理过于认真。教科书里专门有关于白矮星极限质量的推导，精确结果有系数的不同。但是我们这一简单公式给出的太阳质量是有意义的，至少它告诉我们，什么基本物理常数以怎样的方式大致决定了太阳质量。

注意我们的逻辑有不够完善的地方。从天体物理计算出恒星质量可能不是件难事，但是要决定我们的地球围绕的那颗特殊恒星——太阳的质量，因素可能就不单纯了，或许我们的现有知识不足以达到这一目的。但是，一个有理由的简并星质量公式却刚好给出了相当精确的太阳质量，使我们不能忽视这里可能蕴含的深刻联系。太阳当然会有终态，由于某种不敢否认的未知原因，如果我们能凭借这个未知原因得出“带有生命行星的特殊恒星的质量应与其终态质量相近”的结论，于是就有了太阳质量公式 $M_{\text{sun}} = m_n^{-2}/2$ 的合理性。有了太阳质量与核子质量之间的关系，加上刚才得到的太阳密度，我们能立即得出用基本物理常数简洁表达的太阳半径 $R_{\text{sun}} = \alpha^{-1}m_e^{-1}m_n^{-1}$ ，误差只有 1%，实在太奇妙了！

我们还要继续说明那些剩下的公式。但是，从这张表我们也许可以看到端倪，原来我们宇宙的万事万物其实都是被少数几个基本物理常数决定的。那么基本层次上的最重要的基本物理常数包括哪些？怎么由基本层次的物理常数产生出比较表观的物理常数？为什么它们要取它们具有的这些值？我们能从基本物理理论中推算出这些基本物理常数吗？我们宇宙的万事万物与基本物理常数之间的复杂关系究竟如何关联和作用？如果有着其他“宇宙”，为简单起见，假设只有核子质量是可变的，那么当主管宇宙的“上帝”将核子质量调节变大时，“太阳”半径因与核子质量成反比将变小，“太阳”质量因与核子质量平方成反比变得更小，而“太阳”密度因与核子质量成正比将变大，这样的“太阳”在万物图中的位置将向左下方有所移动。这会对它身边的“地球”产生何种影响？其他万物将怎么移动？这些就是我们的后续文章中要深入讨论的有趣问题。

（北京市中国科学院研究生院 100049）



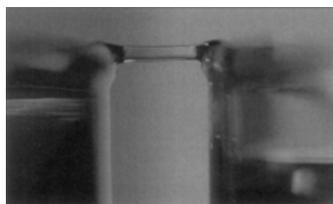
科苑快讯

能够形成桥的充电水

奥地利格拉茨技术大学

（Graz University of Technology）的研究者发现强电场能支持两个烧杯间形成水平的、长 25 毫米的水桥（如图）。福斯（Elmar Fuchs）和同事证明两个装有高度去离子水的容器间在 25kV 时可以出现这种现象，但尚不清楚其形成机制和何以获得支撑力的具体原因，这一实验表明水有一种新的电偶极

宏观排列形式。



（高凌云译自 2007 年第 10 期《欧洲核子研究中心快报》）