奇点与奇点定理简介(上)

卢昌海

什么是奇点

广义相对论中的奇点是一个重要的研究课题,它既是能量条件最早的应用之一,也是全局方法在广义相对论中初试锋芒的范例。我们在《能量条件简介》中曾经提到,广义相对论的经典解(比如施瓦西解)存在奇异性。其中有的奇异性(比如 $r = 2m$)可通过坐标变换予以消除,因而不代表物理上的奇点;而有的奇异性(比如 $r = 0$)则是真正的物理奇点。很明显,在奇点研究中,真正的物理奇点才是我们感兴趣的对象。

那么究竟什么是广义相对论中真正的物理奇点(简称奇点)呢?

这初看似乎是一个很简单的问题。奇点显然就是那些时空结构具有某种病态性质的时空点。但稍加推敲就会发现,这种说法存在许多问题。首先,"病态性质"是一个很含糊的概念,究竟什么样的性质是病态性质呢?显然需要精确化。其次,广义相对论与其他物理理论有一个很大的差异,那就是其他物理理论都预先假定存在一个背景时空,因此那些理论如果出现奇点(比如电磁理论中点电荷所在处的场强奇点)就可明确标识奇点在背景时空中的位置。但广义相对论描述的是时空本身的性质,因此广义相对论中一旦出现奇点,必然意味着时空本身的性质无法定义。另一方面,物理时空定义为具有洛伦兹度规——即符号差为 -2(或 2,取决于约定)的度规——的四维(赝)黎曼流形,它在每一点上都应具有良好的性质。因此物理时空按照定义应该没有奇点,换句话说,奇点并不存在于物理时空。

奇点并不存在于物理时空中,自然就谈不上哪一个时空点是奇点,从而也无法把奇点定义为时空结构具有病态性质的时空点了。但即便如此,仍然无法否认施瓦西解具有奇异性这类显而易见的事实,因此关键还在于寻找一个合适的奇点定义。

为了寻找这样的定义,我们不妨想一想,为什么即便 $r = 0$ 这样的"麻烦制造者"不存在于物理时空,我们仍认为施瓦西解具有奇异性是显而易见的事实?答案很简单:当一个试验粒子在施瓦西时空中沿径向落往中心(即 r 趋于 0)时,它所接触到的时空曲率趋于发散。由于试验粒子的下落是沿非类空(即类时或类光)测地线进行的,这启示我们这样来定义奇点:如果时空结构沿非类空测地线出现病态性质,则表明存在奇点。这个定义不需要将奇点视为时空流形的一部分,从而避免了上面提到的与时空流形定义之间的矛盾。但是这个定义还面临两个问题:一是"病态性质"这个含糊概念仍未澄清;二是在这个定义中,假如试验粒子沿非类空测地线需要经过无穷长时间才能接触到时空结构的病态性质,那么奇点就不具有观测意义。为了解决这两个问题,物理学家提出进一步的要求,即定义中涉及的非类空测地线具有有限"长度",并且是不可延拓的(直观地说,就是在时空流形内没有端点)。这种具有有限"长度"的不可延拓非类空测地线称为不完备非类空测地线。

有了这一概念,我们可以这样来定义奇点:如果存在不完备非类空测地线,则时空流形具有奇点。这就是多数广义相对论文献所采用的奇点定义。这种存在不完备非类空测地线的时空被称为非类空测地不完备时空,简称测地不完备时空。在一些文献中,按照不完备测地线的类型,还将测地不完备时空进一步细分为类时测地不完备与类光测地不完备。这个定义的合理性体现在:一个测地不完备的时空流形中,试验粒子可沿不完备的非类空测地线运动,并在有限时间内从时空流形中消失。这种试验粒子在有限时间内消失于时空流形的行为(即测地不完备性)可视为是对时空结构具有"病态性质"这一含糊要求的精确表述(即试验粒子在有限时间内就可遇到奇点)。这样就既解决了"病态性质"的精确化问题,又使奇点具有了观测意义。一些文献还对奇点存在于过去还是未来进行区分:如果所涉及的非类空测地线是未来(过去)不可延拓的,则对应的奇点被称为未来(过去)奇点。

细心的读者可能注意到我们在前面的"长度"一词上加了引号,这里稍作一点说明。一般来说,类时测地线的长度定义为固有时间 $\tau = \int ds$。但这一定义并不适合描述类光测地线,因为后者对应的固有时间恒为零。因此必须对长度的定义进行推广,将

类光测地线定义为所谓的广义仿射参数, 感兴趣的读者可参阅有关文献。

作为一个例子, 我们来看看施瓦西解中 $r=0$ 的奇点是否满足上面所说的奇点定义。为此我们来计算从施瓦西视界($r=2m$) 出发, 向内(即沿 r 减小方向) 延伸的径向类时测地线的长度(即固有时间)。由施瓦西度规可知 $ds^2=-(2m/r-1)dt^2+(2m/r-1)^{-1}dr^2$, 因此 $\tau=\int ds<\int(2m/r-1)^{-1/2}dr\leqslant\pi m<\infty$。由此可见, 这种测地线长度有限。另一方面, 沿这种测地线趋近 $r=0$ 时, 克雷茨曼标量 $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 发散, 因此这种测地线不可延拓, 表明施瓦西解中 $r=0$ 的奇点满足上面所说的奇点定义。从物理上讲, 这个结果表明, 落入施瓦西视界的试验粒子会在有限固有时间内从物理时空中消失(形象地说, 是“落入奇点”)。

现在让我们再回到定义上来, 奇点的定义要求时空流形具有测地不完备性。读者也许会问: 测地线究竟由于什么原因而不完备? 另外, 虽说测地不完备性是对时空结构具有的病态结构的精确描述, 但“精确”二字是以数学上无歧义为标准的。在物理上仍然可以问这样一个问题: 当试验粒子沿不完备的测地线运动时, 究竟会遇到什么样的时空病态性质? 或者简单地说, 奇点究竟是什么样子的? 对此, 人们曾经试图给出一个直观描述, 可惜一直没能找到一种直观描述, 足以涵盖所有可能的测地不完备性。比方说, 人们曾经认为奇点的产生意味着某些几何量(比如曲率张量) 或物理量(比如物质密度) 发散。如果是这样, 那么沿不完备非类空测地线运动的试验粒子所遇到的将是趋于无穷的潮汐作用或其他发散的物理效应。施瓦西奇点及大爆炸奇点显然都有这种性质, 但细致研究后发现, 并非所有奇点都是如此。一个最简单的反例是锥形时空 $ds^2=dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$, 其中 $r>0$、$0<\varphi<a$ (a 为小于 2π 的一个角度), 并且 $\varphi=0$ 与 $\varphi=a$ 粘连在一起。这个时空是局部平坦的(曲率张量处处为零), 并且显然没有任何发散性。但这一时空无法延拓到 $r=0$(被称为锥形奇点), 因而是测地不完备的(类时与类光都不完备)。这个反例表明奇点不一定意味着发散性。

对奇点的另一种直观描述是: 奇点是时空中被挖去的点(或点集)。比如施瓦西奇点与刚才提到的锥形奇点是被挖去的 $r=0$, 大爆炸奇点则是被挖去的 $t=0$。但这种描述如果正确的话, 那么通向奇点的所有测地线(无论类时还是类光) 必定都是不完备的。换句话说, 如果奇点是时空中被挖去的点(或点集), 那么它的存在将同时意味着类时测地不完备性与类光测地不完备性。上面举出的所有例子都具有这一特点。但细致的研究表明, 这一描述同样不足以涵盖所有奇点。1968 年, 杰罗赫给出了一个共形于闵可夫斯基时空的时空(R^4, $\Omega^2\eta_{ab}$), 其中共形因子 Ω^2 具有球对称性, 在 $r>1$ 区域恒为 1, 在 $r=0$ 上满足 $t^2\Omega\to0$ ($t\to\infty$)。显然, 对于这样的时空, 类时测地线 $r=0$ 沿 $t\to\infty$ 具有不完备性, 因此这个时空流形具有类时测地不完备性。另一方面, 所有类光测地线都将穿越 $r\leqslant1$ 区域进入平直时空, 因而都是测地完备的。由此可见, 这一时空具有类时测地不完备性, 但不具有类光测地不完备性。这个反例表明, 奇点并非都能理解为是从时空中被挖去的点(或点集)。

通过这些例子, 我们可以初步了解奇点定义所包含的复杂性, 它的表述虽然简单, 却巧妙包含了难以完整罗列的种种复杂时空类型。但另一方面, 这个定义虽然已经具有很大涵盖性, 却仍不足以包含所有的奇点类型。这一点也是杰罗赫指出的, 此人在奇点定理的研究中是可与霍金及彭罗斯齐名的人物。1968 年, 杰罗赫在提出上述反例的同一篇论文中给出了另外一种时空, 它是测地完备的, 但却包含长度有限的不可延拓类时曲线(注意是类时曲线而非类时测地线), 并且该曲线上的加速度有界。从物理上讲意味着, 这种时空中使用有限燃料的火箭所携带的试验粒子沿特定类时曲线运动, 可在有限时间内从时空流形中消失。显然, 这与自由下落的试验粒子消失于时空流形具有同样严重的病态性质(事实上这里还要多损失一枚火箭)。因此, 如果我们认为测地不完备性意味着奇点, 就必须承认杰罗赫的时空也有奇点。这个反例表明, 我们(以及多数其他文献) 采用的测地不完备性只是定义奇点的充分条件, 而不是必要条件。也就是说, 一个测地不完备的时空必定具有奇点, 但反过来则不然, 一个测地完备的时空未必就没有奇点。

物理学家对奇点性质所做的研究还有许多, 限于篇幅就不进一步叙述了, 不过在以后介绍宇宙监督假设时, 还会再涉及这一话题, 接下来将介绍奇点定理及其证明。

雷查德利方程

上一节对广义相对论中的奇点作了定义。这样定义的奇点究竟会在什么条件下出现? 它是否如某些物理学家猜测的那样来源于对称性? 这些就是奇点定理所要回答的问题。

由于对奇点的定义是建立在测地不完备性之上的, 因此为了研究奇点产生的条件, 很自然的做法就是研究测地线的性质。我们用 V 表示测地线的切矢量, 对于类时测地线来说, V 满足两个条件 $V^a V_a = 1$(归一化条件) 及 $V^a V^b{}_{;a} = 0$(自平行移动条件)。我们效仿线性代数引进投影算符的做法, 引入一个辅助张量 $h_{ab} = g_{ab} - V_a V_b$。不难证明, h^a_b 是与 V 垂直的子空间上的投影算符, 因此 h_{ab} 有时被称为时空度规 g_{ab} 的"空间部分"。

我们知道, 时空曲率的存在会导致沿相邻测地线运动的试验粒子之间的距离发生变化, 这是所谓的测地偏移效应, 它是引力相互作用的一种体现。我们对测地线性质的研究也从这个角度入手。对一个测地线束来说, 如果我们用与切矢量 V 垂直的自然基矢 S 表示测地偏移矢量, 则可证明 $dS^a/d\tau = V^a_{;b} S^b$(其中 τ 为固有时间)。这表明, $V^a_{;b}$ 描述了测地偏移矢量沿测地线的变化。如果把沿测地线束运动的一群粒子看成一种类似于连续介质的东西, 那么 $V^a_{;b}$ 描述的就是这一介质的形变。我们可仿照连续介质力学的做法, 用前面定义的时空度规的"空间部分" h_{ab} 将这种形变分解为 $V_{a;b} = (1/3)\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}$, 其中 θ、$\sigma_{ab}$ 及 ω_{ab} 分别定义为 $\theta = V_{a;b} h^{ab} = V^a_{;a}$、$\sigma_{ab} = V_{(a;b)} - (1/3)\theta h_{ab}$、$\omega_{ab} = V_{[a;b]}$。这里的 $V_{(a;b)}$ 与 $V_{[a;b]}$ 分别为 $V_{a;b}$ 的对称与反对称部分。上面这三项都有明确物理意义: θ 被称为膨胀标量, 描述的是测地线束汇聚或发散的趋势; σ_{ab} 被称为切变张量, 描述的是测地线束的空间截面在体积不变(由无迹条件所保证)的情况下产生形变的趋势; ω_{ab} 被称为涡旋张量, 描述的是测地线束在空间截面形状不变的情况下相互缠绕的趋势。其中描述测地线束汇聚或发散的 θ 对于奇点定理的讨论有着特别重要的意义, 因此我们将着重对它进行研究。

为了研究 θ, 我们注意到从物理上讲, 影响 θ 的因素是时空曲率(或者说物质分布——两者通过爱因斯坦场方程彼此联系), 因此从曲率张量的定义式 $V^a_{;bc} - V^a_{;cb} = R^a{}_{dbc} V^d$ 出发。将这一表达式对指标 a 和 b 进行缩并, 与 V^c 取内积, 并利用 $V_{a;b}$ 的分解式及类时切向量 V 的性质, 便可证明 θ 沿测地线的变化为 $d\theta/d\tau = V^a\theta_{;a} = -R_{ab}V^aV^b - (1/3)\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab}$, 其中 τ 为固有时间。这个方程被称为雷查德利方程, 是印度物理学家雷查德利与俄国物理学家朗道各自独立提出的。雷查德利方程的提出恰好是在爱因斯坦逝世的那年(1955 年), 它与能量条件的结合将成为证明奇点定理的重要环节。

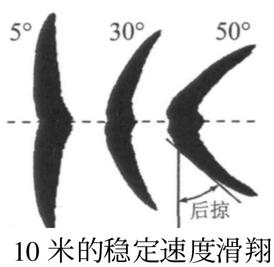
(作者主页: http://www.changhai.org/)

科苑快讯

可变形翼帮助鸟类自由滑翔

通过肌肉控制骨骼的活动关节, 鸟类可以不断变换羽毛的交叠状态, 从而改变翅膀的形状和大小, 不必拍打翅膀就能在空中轻松滑翔。为了深入了解其中的机理, 荷兰研究者研究了风洞中的普通雨燕。

具有高超滑翔本领的雨燕, 大部分时间都处在空中(甚至不用拍打翅膀)。他们发现雨燕翅膀在充分向外展开时最适于缓慢滑翔, 此时需要的新陈代谢最少。当雨燕翅膀向外伸展并以每秒 8~10 米的稳定速度滑翔时, 实际上是在休息。而翅膀朝尾部后掠收回(见图) 不仅能高速滑翔, 而且动作更加轻盈。特别是翅膀后掠可以负担更多载荷, 在每秒 30 米高速转弯时承受住不断增加的向心加速度。



他们利用自己的研究数据开发了一个半经验主义模型, 它与雨燕处于休息状态的雷达测量结果非常吻合。可变形翼有助于控制未来新型航空器的飞行, 这种新型航空器将有鸟类一样会拍动的机翼。

(高凌云译自 2007 年第 6 期《今日物理》)