



测地线束与共轭点

在雷查德利方程中,如果所考虑的测地线束局部正比于某个梯度场,或者说垂直于某个超曲面,则称该线束是超曲面垂直的。可以证明,对于这样的测地线束来说,涡旋张量 ω_{ab} 为零,从而雷查德利方程可以简化为

$$\frac{d\theta}{d\tau} \equiv V^a \theta_{;a} = -R_{ab} V^a V^b - \frac{1}{3} \theta^2 - \sigma_{ab} \sigma^{ab}$$

由于 $\sigma_{ab} \sigma^{ab}$ 总是非负的,因此从这个方程中我们可以得到

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -R_{ab} V^a V^b - \frac{1}{3} \theta^2$$

如果进一步假定强能量条件成立,即 $R_{ab} V^a V^b$ 处处非负,则上述不等式可以进一步简化为

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3} \theta^2$$

对这个不等式进行积分可得:

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{3} (\tau - \tau_0)$$

其中 $\theta_0 = \theta(\tau_0)$ 。从这个不等式可以得到一个重要推论,那就是倘若 $\theta_0 < 0$, 即线束在 $\tau = \tau_0$ 时出现汇聚效应,则 θ 会在有限固有时间内 $\tau - \tau_0 \leq 3/|\theta_0|$ 内趋于负无穷。可以证明,这意味着测地线束在该处汇聚为一点,或者说测地偏离矢量场(也称为雅各比场)在该处为零。如果一个从 p 点发出的非平凡(即各测地线不处处重合)的类时测地线束在 q 点汇聚,我们就把 q 和 p 称为该测地线束上的一对共轭点。从以上分析可以看到,如果从 p 点发出的一个类时测地线束在未来某一点上出现汇聚效应 $\theta < 0$, 则在该线束上距离 p 有限远的地方必定存在一个与 p 共轭的点 q , 当然这里我们要假定该测地线束可以延伸到 q 点。

显然,在一个测地完备时空中,“测地线束可以延伸到 q 点”这一假定是自动满足的。因此,对于测地完备时空来说,上面这个结果是所有类时测地线都满足的普遍性质。进一步的分析表明,上述结果所要求的条件,即在某一点上 $\theta < 0$, 可以转化为一个有关曲率张量的条件,由此可以得到这样一个结

奇点与奇点定理简介(中)

卢昌海

果:在一个测地完备的时空中,如果强能量条件成立,并且在每条类时测地线上至少有一个点使得 $R_{abcd} V^b V^d \neq 0$, 则所有类时测地线上都存在共轭点对,简称共轭对。

从物理意义上讲,每条类时测地线上至少有一个点使得 $R_{abcd} V^b V^d \neq 0$, 意味着每条类时测地线都至少会在一个时空点上遇到由物质分布或引力波所造成的某种测地偏离效应。这一条件(称为类时一般性条件)在理论上,可以在一些非常特殊的情形下被违反,比如曲率张量与测地线切矢量形成特殊分量匹配的情形。但对于具有现实物理意义的情形来说,由于物质及引力波的分布往往足够弥散及随机,可认为类时一般性条件是得到满足的。

上面这些结果都是针对类时测地线的。不过可以证明,除了一些不影响定性结果的差异外,类光测地线也具有类似的性质。类光测地线所满足的一般性条件称为类光一般性条件。类时与类光一般性条件统称为一般性条件。从某种意义上讲,一般性条件也是对物质分布的间接限定。这种限定不同于能量条件,因为平直时空满足所有那些能量条件,却不满足一般性条件。有鉴于此,有些文献把一般性条件通俗地表述为“时空中存在物质”。不过要注意的是,由于一般性条件涉及的是曲率张量本身,因此不能通过场方程约化为对物质能量动量张量的直接限制。把类时与类光情形合在一起,我们前面介绍的结果可以重新表述为:在一个测地完备的时空中,如果强能量条件与一般性条件成立,则每条非类空测地线上都存在共轭点对。这是一个不依赖于对称性的普遍结果,它对于奇点定理的证明及确立奇点定理的普适性都有极其重要的作用。

上面的结果表明,在一个具有适当物质分布的测地完备时空中,共轭点的存在是普遍现象。假如有一个适当的物质粒子群沿某个非类空测地线束运动,那么当它们运动到共轭点上时,由于测地线的汇聚,粒子的数密度(以及质量密度)将趋于发散,从而形成一个奇点。雷查德利发表于1955年的原始论文就涉及了这样的情形。不过,在一般情况下没有理由假定存在那样的物质粒子群,因此共轭点的

存在不会直接导致奇点,上述结果也不足以作为奇点存在性的证明。但是,这一结果为10年后彭罗斯等人的工作奠定了基础,是证明奇点定理的第一步。这一步所侧重的是引力理论中的动力学因素,强能量条件的引进是这种因素的体现。

在下一节中我们将会看到,当我们把有关测地线的上述结果与看似风马牛不相及的时空的因果性质结合起来时,奇点在广义相对论中的出现几乎是不可避免的。

时空的因果结构

证明奇点定理的第二步侧重的是时空的因果结构。在物理学中,因果性是一个很微妙的概念。一方面,它是现实世界中最基本的经验事实之一;另一方面,却很少有物理理论直接把因果性作为前提条件。由此导致的一个结果是:某些物理理论起码在形式上允许因果性的破坏。广义相对论就是这样的一个理论。在广义相对论中,破坏因果性最简单的方式是产生闭合非类空曲线(请读者想一想,这种曲线在什么意义上破坏因果性)。为了对这种类型的因果性破坏进行界定,人们引进了一个条件,叫做因果性条件:一个时空如果不存在闭合非类空曲线,则称为满足因果性条件。由于所有有质量粒子都只能沿类时曲线运动,因此人们还提出了一个比因果性条件稍弱的条件,称为时序条件,它与因果性条件的差别在于把“不存在闭合非类空曲线”减弱为“不存在闭合类时曲线”。

虽然时序条件比因果性条件稍弱,但可以证明,一个时空如果在时序条件之外还满足测地完备性,则该时空将不仅满足因果性条件(即不存在闭合非类空曲线),而且不存在可以无限逼近闭合非类空曲线的曲线。这个比因果性条件更强的性质被称为强因果性条件,该条件在奇点定理的研究中是一个重要概念。

奇点定理研究中的另一个重要概念是所谓的封闭陷获面。这是一种特殊的二维封闭类空曲面,所有与之正交的类光测地线束无论向内还是向外都是趋于汇聚的(即 $\theta < 0$)。从物理上讲,这意味着从封闭陷获面发出的光波的波前是收缩的。这种曲面在广义相对论中并不鲜见,比如施瓦西解中所有 $r < 2m$ 的曲面都具有这一性质(这表明任何物质—包括光波—都不能从施瓦西黑洞中逃脱)。

由于封闭陷获面的定义建立在类光测地线的行

为之上,因此我们引进与类光测地线有关的两个特殊点集: $E^+(S)$ 与 $E^-(S)$,分别由从曲面 S 发出的未来与过去方向的类光测地线组成。在这一定义中我们假定 S 上任意两点间都不存在类时连接,这种点集 S 被称为非时序点集。封闭陷获面由于是类空的,因此显然也是非时序点集。可以证明,如果强能量条件成立,则对于任何封闭陷获面 S , $E^+(S)$ 与 $E^-(S)$ 紧致。

我们知道,物理上所有的相互作用都是非类空传播的(也就是说相互作用的传播速度不大于光速)。因此,如果我们考虑时空中某一点上的任何物理性质,它所能依赖的初始条件只能位于与该点具有非类空连接的时空点上。反过来说,给定某个时空区域 S 上的初始条件,我们能完全确定其性质的时空区域是由那样的一些点组成的:所有通过那些点的过去不可延拓非类空曲线都与 S 相交。这一时空区域被称为 S 的未来柯西展开或未来影响域,通常记为 $D^+(S)$ 。 $D^+(S)$ 的边界被称为未来柯西视界,记为 $H^+(S)$ 。类似地,我们也可以定义过去柯西展开(或过去影响域)和过去柯西视界,分别记为 $D^-(S)$ 和 $H^-(S)$ 。未来柯西展开与过去柯西展开合在一起——即 $D^+(S) \cup D^-(S)$ ——称为柯西展开(或影响域),记为 $D(S)$ 。一个时空(或时空中的一个点集) M 中如果存在一个封闭非时序点集 S ,使得 $M = D(S)$,则称为是全局双曲的,相应的封闭非时序点集 S (可以证明它一定是一个超曲面)被称为柯西面。柯西面可以被形象地理解为时空中对应于某一时刻的超曲面。一个时空如果是全局双曲的,我们就可以通过柯西面上的初始条件预言整个时空的演化,因此时空的全局双曲是一种非常优良的因果性质。1965年,彭罗斯正是在假设时空为全局双曲的基础上证明了最早的奇点定理。但是,时空的全局双曲是一个很强的假设,要想证明现实时空满足这样的假设几乎是不可能的。因此5年之后,霍金与彭罗斯放弃了这一假设,在一组物理上更容易实现的假设的基础上重新证明了奇点定理,那便是我们所要介绍的霍金—彭罗斯奇点定理。

对于奇点定理的证明来说,全局双曲点集有一个很重要的性质,那就是其中任意两个可以建立非类空连接的时空点 p 和 q 之间必定存在一条非类空测地线,其长度大于 p 和 q 之间的任何其他非类空曲线,并且在 p 和 q 之间不存在与 p 共轭的点。

在上节中,我们介绍了一些在奇点定理研究中常用的有关时空因果性质的结果。虽然这些结果比较零散,但有些读者可能已经看出一点思路来了:我们在“测地线束与共轭点”一节中曾经证明了,在适当的条件下,每条非类空测地线上都存在共轭对;而在上节的末尾我们则开始接近一个相反的结果,即在另外一些条件下,某些测地线上不存在共轭对。这对彼此矛盾的结果正是奇点定理证明的关键。确切地讲,奇点定理的证明是要通过这对彼此矛盾的结果来论证以下五个条件不可能同时成立:

1. 时空是测地完备的。
2. 强能量条件成立。
3. 一般性条件成立。
4. 时空满足时序条件。
5. 时空中存在一个非时序点集 S , 使 $E^+(S)$ 与 $E^-(S)$ 紧致。

限于篇幅,我们只能简单叙述一下论证的思路。在上述五个条件中,1~3 是第三节所介绍的证明奇点定理的第一步所用的条件,由此推知的是每条非类空测地线上都存在共轭对。1 和 4 所推知的(如上文所述)是时空满足强因果条件。而由强因果条件与 5 则可以证明这样一个结果:时空中存在一个包含一条未来不可延拓类时曲线 γ 及一条过去不可延拓类时曲线 λ 的全局双曲区域 M 。利用这一结果就可以证明时空中存在一条没有共轭对的非类空测地线。具体的做法是:在 λ 上取一个沿过去方向趋于无穷的点集 a_n , 同时在 γ 上取一个沿未来方向趋于无穷的点集 b_n (选取时使得 b_1 在 a_1 的类时未来,从而保证所有 b_n 都在 a_n 的类时未来)。由于 M 是全局双曲的,因此(如上文所述)在每一对 a_n 和 b_n 之间都存在一条(长度最大的)非类空测地线 μ_n , 其上在 a_n 和 b_n 之间不存在 a_n 的共轭点。可以证明, M 中的这一由非类空测地线 μ_n 组成的无穷集合必定存在一个“聚点” μ , 它是一条非类空测地线,并且其上不存在任何共轭对。这样,我们就得到了与第一步所得的“每条非类空测地线上都存在共轭对”相矛盾的结论,从而证明了上述五个条件不可能同时成立。

既然上述五个条件不可能同时成立,那么我们就可以用其中四个条件为前提(即假定这四个条件成立),来推翻剩下的那个条件。霍金与彭罗斯所做

的是以 2~5 为前提,来推翻 1,即证明时空不是测地完备的。按照第一节所作的定义,这表明时空中存在奇点。这就是霍金与彭罗斯的奇点定理。

在奇点定理所采用为前提的 2~5 中,2~4 都有明确的物理意义,唯独 5——即时空中存在一个非时序点集 S , 使 $E^+(S)$ 与 $E^-(S)$ 紧致——显得很抽象。幸运的是,我们可以用一些物理意义更为明确的条件来取代这一抽象的数学条件。在上文中我们介绍过,如果强能量条件成立,则对于任何封闭陷获面 S , $E^+(S)$ 与 $E^-(S)$ 紧致。由于强能量条件已经包含在 2~4 中了,因此我们可以用“时空中存在封闭陷获面”来取代 5,这个条件在物理上可以由足够致密的星体来满足。除此之外,霍金与彭罗斯还提出了另外两个条件来取代 5:一个是“时空中存在紧致无边的非时序点集”,这个条件在物理上可以由空间上有限无边的宇宙满足;另一个是“时空中存在一个点,通过该点的所有未来(或过去)方向的类光测地线束的膨胀标量 θ 最终将变为负值”,这个条件在物理上可以由局部膨胀或收缩的宇宙满足。这三个都是原则上可以检验,并且很可能在我们的宇宙中已经得到满足的条件。

至此,我们可以对霍金与彭罗斯所证明的奇点定理做一个完整的表述。

霍金—彭罗斯奇点定理 一个时空若满足以下条件,就必定是非类空测地不完备的(即存在奇点):

1. 强能量条件成立。
2. 一般性条件成立。
3. 满足时序条件。
4. 以下三个条件之一成立:
 - a) 存在封闭陷获面。
 - b) 存在紧致无边非时序点集。
 - c) 存在一个点,通过该点的所有未来(或过去)方向的类光测地线束的膨胀标量 θ 最终将变为负值。

这个定理是霍金与彭罗斯于 1970 年提出并证明的。如我们在上文中所说,这并不是最早的奇点定理。彭罗斯于 1965 年,杰罗赫于 1966 年,霍金于 1967 年等都提出过奇点定理。比较之下,霍金—彭罗斯奇点定理所要求的条件在物理上最容易实现,并且涵盖面也广,因此人们提到奇点定理的时候通常指的就是这一定理。霍金—彭罗斯奇点定理不依赖于对称性,它对于确立广义相对论中奇点的存在

中国散裂中子源简介

韦 杰

一、中子散射

1932 年, 查德威克发现了中子, 人们认识到原子核由带正电的质子和不带电的中子构成。中子的发现及应用是 20 世纪最重要的科技成就之一。

当一束中子入射到所研究的对象上时, 与研究材料中的原子核或磁矩发生相互作用, 被散射出来, 通过测量散射出来的中子能量和动量的变化, 可以研究在原子、分子尺度上各种物质的微观结构和运动规律, 告诉人们原子、分子在哪里, 原子、分子在做什么, 这种研究手段就叫中子散射技术。用于中子散射的中子, 波长从几埃到几十埃、能量在毫电子伏特到电子伏特之间, 分别与物质中原子分子之间的距离和相互作用能量相当。

溶解酵素蛋白

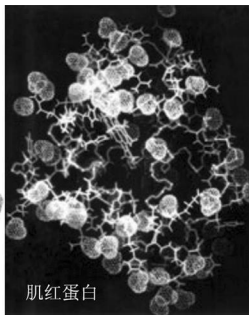
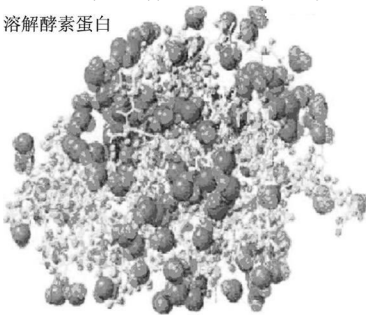


图 1

中子不带电、具有磁矩、穿透性强, 能分辨轻元素、同位素和近邻元素以及具有非破坏性, 使中子散射成为研究物质结构和动力学性质的理想探针之一, 是多学科研究中探测物质微观结构和原子运动的强有力手段。自 1936 年成功进行首次中子衍射实验以来, 中子散射已广泛用于物理、化学、材料、生物、地质、能源、医疗卫生和环境保护等众多研究领域。同步辐射产生的高亮度 X 射线, 主要与原子外围的电子云发生相互作用, 从而探知物质的微观信息; 而中子是电中性的, 它与电子云基本不发生相互作用, 而主要与物质中的原子核相互作用。因此,

作为探测微观结构的两种主要探针, 同步辐射和中子散射看到的正好是物质的两个不同方面。这种优势互补已被许多学科用来准确研究物质中原子的位置、排列、运动和相互作用等, 图 1 是利用中子散射观察到的含水溶解酵素蛋白和肌红蛋白的结构。

中子散射的作用既与同步辐射互补, 又具有独特和不可替代性。其先进性与优越性表现在: ①具有宽泛的波长范围: 从零点几埃到亚微米范围内连续可调。是度量原子、分子和原子分子团簇间距离从埃到纳米范围内的凝聚态物质微观结构最适合的标尺; ②有合适的能量覆盖: 热中子的能量从微电子伏特到电子伏特, 与凝聚态物质中的大部分动态过程的能量相当, 适合研究物质中各种不同的相互作用和动态过程; ③能精确确定轻原子的位置; ④能区分同位素: 原子核内中子数的变化可以极大地影响其对中子的散射。⑤存在磁散射, 是研究磁性微观对称性和磁矩运动最直接的工具; ⑥高动量转移 (Q 值) 的散射强度明显: 有利于研究物质中原子周围局部的细微变化和复合材料的结构特征; ⑦具有高穿透性: 对工业上常用的钢铁和铝的穿透深度约为 7mm 和 65mm; ⑧拥有非破坏性: 应用热中子散射, 不破坏生物样品的活性, 特别适用于研究生物活性体系。

二、散裂中子源

先进的中子源是中子科学研究的基础。自 1932 年中子被发现以来, 能产生高通量中子的中子源一直是科学家不断努力追求的目标。

高通量中子源包括反应堆和散裂源。核反应堆是一种稳定连续的中子源, 在中子科学研究中发挥了巨大作用。通常使用 ^{235}U 作为核燃料, 每次核裂变产生一个有效中子, 释放 180MeV 的热量。堆芯中如此大量的热量必须及时有效地带出, 才能保证

性及普遍性来说是非常强有力的, 同时它也是对我们《能量条件简介》的引言中介绍的奇点产生原因之争的判决性结论。但霍金—彭罗斯奇点定理也有一个显而易见的缺点, 那就是它既无法告诉我们究竟哪一条非类空测地线是不完备的, 也无法提供有

关奇点具体性质的信息。这一缺点为后人加强奇点定理的结论部分留下了空间。不过要想加强奇点定理的结论部分, 往往不可避免地对前提部分也要予以加强。然而, 这会有损定理的普遍性。

(作者主页: <http://www.changhai.org/>)

现代物理知识