

# 宇宙起源梗概

——用初等数学解读大爆炸和黑洞

刘导恒

2007年5月14日《长江日报》报道，宇宙的年龄约为137亿岁。赵峥的《黑洞与弯曲的时空》第127页中不加推导地说宇宙是从极小尺度 $10^{-35}\text{m}$ 和极高温 $10^{32}\text{K}$ 大爆炸形成的，……。这是怎么回事？这些都涉及“宇宙起源”问题。“宇宙起源”既是一个古老的问题，也是当今自然科学的前沿之一，更是一个复杂深奥的理论问题。盛传20世纪20年代，只有两人能理解广义相对论，而今百万人能理解其梗概（参考霍金：《时间简史》p167）。所以“宇宙起源”也应该简化，不但文字和概念上要精简，必要的教学也要简化（杨振宁说过，理论物理的语言是数学），不用数学推导，只列出结论，似乎也难以使人信服。所以本文尝试只用初等数学介绍宇宙起源的梗概。

宇宙是指“以星星为代表的整个天体系统”。现在多数科学家认为，宇宙也像生物界、人类以及人类社会一样，处于不断地演变之中，宇宙也是有起源的。概括地说就是：宇宙“现在”正在膨胀，宇宙的“过去”起源于大爆炸，“将来”宇宙中的恒星可能变成黑洞。

## 一、哈勃定律

宇宙“现在”正在膨胀的根据是哈勃定律。从1929年开始，经哈勃粗测以及后人精测得出如下哈勃定律：星系间的退行速度 $v$ 与星系间的距离 $D$ 成正比，即

$$v=HD. \quad (1)$$

其中哈勃常数 $H=71(\text{km/s})/\text{Mpc}=22(\text{km/s})/(\text{Ml.y})$ （霍金等《果壳星的60年》p52）。说明如下：

a) 光年(1.y)：是天文学中常用的量度大尺度范围的长度单位，是光在一年时间内所通过的距离。光从太阳传到地球约需8分钟。离太阳最近的恒星（半人马座的比邻星），它们之间的距离是4.22光年。Ml.y是百万光年。

b) 星系：是由千亿颗恒星和星际物质（气体及尘埃等）聚集在一起的天体系统，它的尺度约几万光年，星系间相距约几十万光年。银河系就是一个星系。离银河系最近的星系是大小麦哲伦

星云，它们离银河系的距离约20万光年。星系可看成是宇宙中的“岛屿”，估计宇宙中约有万亿颗星系。

c) 退行：已知，行星绕恒星转动，例如地球绕太阳转动；恒星绕星系“中心”转动，例如太阳在银河系中以250千米/秒的速度绕“银心”转动，转一圈需时约2.5亿年。星系又是如何运动的呢？星系是否也绕某个“中心”转动呢？1929年哈勃用大口径光学天文望远镜对当时已知的40多颗星系中的24颗进行测量，发现星系的运动有两个特点：其一是由光谱红移判断星系大都在做远离我们的运动，而不是有的在接近，有的在远离。为此人们把这种运动叫做“退行”。且进一步判断银河系不具特殊地位，宇宙没有“中心”。其次，退行速度的大小也不是杂乱无章的，而是与星系间的距离有关，这个关系是正比例关系。后来，经过对更多星系的精测，就得到了上述哈勃定律。

d) 宇宙膨胀模型：自发现哈勃定律之后，人们提出了各种宇宙模型（假说），例如引力常数可变模型、稳恒态模型等。但多数科学家倾向于“宇宙膨胀模型”。这种模型是对比物体的膨胀现象而提出的。例如给一个有很多着色点、膜厚均匀的橡皮气球持续打气（或加热），气球就膨胀。

气球（或其他物体）膨胀的特点有二：一是色点间的距离都在增加（参照图1），即存在退行现象；其二是在相同时间内，间距大的两色点间所增加的距离也大，这就相当于退行速度正比于色点间的距离。将哈勃定律和物体膨胀现象对比，可见，“宇宙现在正在膨胀”的说法是合理的。

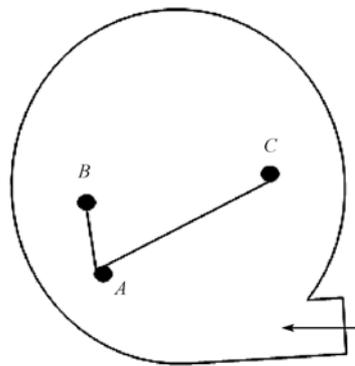


图1

## 二、宇宙的起源

既然宇宙“现在”正在膨胀。那么，“过去”星系必然相互靠得很近。历史回推，宇宙是否有个起源呢？目前大多数科学家认为，宇宙起源于大爆炸。

**大爆炸** 根据相对论和量子力学理论，可以计算出，原始宇宙的空间尺度极小 ( $\Delta x \sim 10^{-35} \text{m}$ )，温度极高 ( $T \sim 10^{32} \text{K}$ )，然后暴涨，再经过长时间的演变，宇宙才形成现在这个样子。人们把这个过程比喻为宇宙起源于大(热)爆炸。上述数据可以这样推导：根据量子力学的测不准关系，物质系统的尺度不能为零。那么原始宇宙的最小尺度是多少呢？把原始宇宙看成一个粒子，设它的质量为  $m$ ，速度为  $v$ 。由波粒二象性，动量  $p = mv$  的粒子，它的波长(德布罗意波长)  $\lambda = h/p$ ，此处  $h$  为普朗克常数。再由相对论观点，粒子的速度不能大于真空中光速  $c$ ，所以粒子的最小波长不能小于  $\lambda_p = h/mc$  (这个波长又叫康普顿波长)。一个波的最小尺度也就是一个波长。所以，可以认为，原始宇宙(最小)尺度为康普顿波长，即

$$\Delta x \approx \lambda_p = h/mc. \quad (2)$$

此处  $m$  是原始宇宙的质量。

再根据相对论，质量为  $m$  的黑洞的半径  $R_H = 2Gm/c^2$ ，此处  $G$  是万有引力常数(黑洞以及公式来源见第三部分讨论)。由于  $R_H$  处的引力极强，连光线受到拉扯都不能逃逸，所以黑洞内的任何信息外界都“看不见”，所以  $R_H$  也叫黑洞的“视界”。按相对论观点也可以理解为，原始宇宙的最小尺度：

$$\Delta x \approx R_H = 2Gm/c^2. \quad (3)$$

联立式(2)、式(3)并代入常数值，最后得  $\Delta x$  (数量级)

$$\begin{aligned} \Delta x^2 &= \lambda_p R_H = h/mc \times 2Gm/c^2, \\ \therefore \Delta x &= \left( \frac{2Gh}{c^3} \right)^{1/2} = \\ &= \left( \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 6.63 \times 10^{-34}}{(3 \times 10^8)^3} \right)^{1/2} \approx 10^{-35} \text{m}. \end{aligned}$$

下面来求原始宇宙的“温度”  $T$ ，粒子的动能越大，等效的温度越高，它们的关系为

$$(1/2)mv^2 = kT, \quad (4)$$

此处  $k$  是玻尔兹曼常数。(注：《霍金讲演录》第 78 页“质量只有十亿吨的黑洞，也就是尺度大约和质子差不多的太初黑洞，会有大约一千二百亿开尔文

的温度，这相当于一千万电子伏的能量”)。再设  $v \approx c$ ，则由式(2)和式(3)  $\lambda_p = R_H$  即  $h/mc = 2Gm/c^2$  得  $m = \sqrt{hc/(2G)}$  代入式(4)得：

$$\begin{aligned} T &= \frac{mc^2}{2k} = \sqrt{\frac{hc^5}{8Gk^2}} \\ &= \left( \frac{6.63 \times 10^{-34} \times (3 \times 10^8)^5}{8 \times 6.67 \times 10^{-11} \times (1.38 \times 10^{-23})^2} \right)^{1/2} \approx 10^{32} \text{K}. \end{aligned}$$

**宇宙演化简史** 宇宙的演化涉及到物质结构，粒子的四种相互作用等复杂问题，下面仅从几个时间段，简述其结论。(参看李宗伟等《天体物理学》p448)

$0 \sim 10^{-43}$  秒是普朗克时期：人们通常把康普顿波长等于视界半径的尺度叫普朗克尺度(霍金等《果壳里的 60 年》p95)，它包括空间尺度  $\sim 10^{-35} \text{m}$ ，温度尺度  $\sim 10^{32} \text{K}$  (前面已讨论过)，还包括普朗克时间等。由  $v = \Delta x / \Delta t$ ，已知  $\Delta x$  最小不确定量  $10^{-35} \text{m}$ ，速度最大为光速  $c$ ，所以时间最小不确定量(即普朗克时间)  $\Delta t = \Delta x / c = 10^{-35} / (3 \times 10^8) \approx 10^{-45}$  秒。也可以理解为  $0 \sim 10^{-43}$  秒为宇宙的“创生期”。

$10^{-43} \sim 10^{-35}$  秒是重子出现时期：在此时的高温条件下，粒子的能量如此之高，在他们相互碰撞之下，产生了主要是夸克和反夸克的各种正反粒子。

$10^{-35} \sim 10^{-33}$  秒是暴胀时期：在极高温度情况下，宇宙的体积指数式增长，在  $10^{-35} \sim 10^{-33}$  秒极短时间内，体积增加  $e^{100} \approx 10^{43}$  倍。此时，质子和中子还不稳定。

$10^{-33} \sim 1$  秒是轻子出现时期：在此时间内，由于宇宙膨胀，温度降低，相继大量出现了电子对，光子和中微子等轻子。

$1 \sim 100$  秒是核形成时期：随着温度从 100 亿度(大约是太阳中心温度的 1000 倍)降到 10 亿度，质子和中子的能量已减少到不足逃脱强核力的吸引，氘、氦、碳、氧、硅等元素原子核相继形成。

$100$  秒~百万年是原子形成时期：大爆炸后的几小时内，氢和其他元素的产生就基本停止了，之后的百万年，宇宙仅仅是继续膨胀。一旦温度降到几千度，电子和原子核不再有足够的能量去抵抗它们之间的电磁吸引，原子就形成了。

百万年~10 亿年是恒星形成时期：随着时间的流逝，由于原子在空间的不均匀分布，引起部分原

子在自身引力的作用下“坍缩”成“星云”，在坍缩过程中大量原子相互碰撞，星云中心的温度将升高，直到足以开始产生热聚变核反应，这些反应将更多的氢转变为氦等（如同太阳），并将反应的能量以光和热的形式向周围发射。这样，宇宙中的恒星就出现了。

10 亿到 150 亿年是现在的宇宙。

宇宙的年龄 设从大爆炸开始，宇宙膨胀到现在一共经历了  $T$  时间（即宇宙的年龄），再设某一对星系间的退行速度  $v$  在宇宙膨胀的漫长过程中基本保持不变（即看成匀速运动），则这一对星系现在的距离  $D=vT$ 。另一方面，由哈勃定律，该两星系间的距离  $D$  和退行速度的关系是  $v=HD$ ，所以

$$T = \frac{D}{v} = \frac{D}{HD} = \frac{1}{H} = \frac{1}{22 \frac{\text{km/s}}{\text{Mly}}} = \frac{1 \text{ 百万光年}}{22 \text{ km/s}} = \frac{10^6 \times 3 \times 10^5 (\text{km/s}) \text{ 年}}{22 \text{ km/s}} = 137 \times 10^8 \text{ 年} \quad (137 \text{ 亿年})。$$

（参看霍金等《果壳里的 60 年》p52）。由于上述结果是在假设退行速度与时间无关条件下得出的，虽然宇宙大爆炸初期膨胀的时间极短，可忽略不计，而上百亿年宇宙膨胀是否完全均匀，还待研究，所以宇宙年龄 137 亿年是个约数。根据放射性物质半衰期测定，地球的地质年龄约 50 亿年，这个数据也可以作为上述宇宙年龄的佐证。

宇宙的尺度 “天”有多大？根据大爆炸理论，宇宙的原始尺度很小，已膨胀了一百多亿年，即使星系以最大速度“光速”运动，估算现在宇宙的尺度也约 150 亿光年。

### 三、黑洞

上面我们讨论了宇宙的“过去”和“现在”，那么宇宙的将来会怎样呢？我们这里只讨论恒星的演变问题。

恒星 恒星是质量在  $0.1M_{\odot} \sim 100M_{\odot}$  之间（ $M_{\odot}$  是太阳的质量）其内部能持续发生热核反应并可自主发光的气体球。

坍缩（塌缩） 恒星的外层物质在高温条件下，受到两个方向的力的作用，一个是热膨胀向外的压力，一个是恒星内部物质向内的引力，在这两种力的作用下，恒星能长期处于动态平衡中。例如太阳已经存活了五十亿年，估算还能存活五十亿年。但是，一旦恒星内部的核反应停止，上述平

衡就会被打破，天体外层物质将在强大的万有引力作用下塌缩。

中子星 在质量不变的条件下，塌缩的结果是恒星的体积变小，密度就会增加，恒星可能演变成密度较大的白矮星或密度更大的中子星。下面只讨论中子星：某些质量较大的恒星，由于核反应产生的能量可能大于其散发的能量，其内部温度可能升至极高，而产生所谓的超新星爆炸（中国古代公元 1054 年就有超新星爆炸的记录，新近超新星爆炸的图片已见于报刊和电视）。超新星爆炸产生的巨大反向压力，能把原子中的电子挤进质子里面而形成中子，这个以中子为主的天体就叫中子星。已经观察到质量为  $1.86M_{\odot}$  的中子星，其半径是 9.2km。

黑洞 在一定条件下，天体的密度可能比中子星还要大时，会发生什么情况呢？理论上认为，这种天体就是所谓“黑洞”。黑洞是一种非常致密，其引力强大到连光也不能从它表面“逃逸”的天体。由于任何物质的速度都不能超过光速，所以掉进黑洞里的任何物质都将一去不复返。黑洞的条件是：

$$2GM/R \geq c^2, \quad (5)$$

这里  $G$  是万有引力常数， $M$  是黑洞的质量， $R$  是黑洞的半径， $c$  是光速。

下面用半经典理论导出上述公式。我们知道，从某星球（例如地球）表面，以较小的速度上抛一物体，它会上升一定高度后又回落下来，如果物体的上升初速大到一定程度，它就可能脱离该星球的引力而遨游太空。物体能遨游太空的条件是它的初动能  $(1/2)mv^2$  要大于物体在飞离该星球的过程中克服引力所作的总功  $A_{\text{总}}$ ，即  $(1/2)mv^2 \geq A$ （公式取等号时的速度，是物体摆脱该星球作用的最低速度，称为“逃逸速度”）。此处  $A_{\text{总}}$  是变力的功。设把整个逃逸过程分成很多距离相等的小段，每一小段距离长为  $h$ 。万有引力为  $F=GmM/r^2$ ， $r$  是物体离星球中心的距离。在第一小段的引力介于  $\frac{GmM}{R^2}$  和

$$\frac{GmM}{(R+h)^2}$$

之间，取平均值  $\frac{GmM}{R(R+h)}$ ， $R$  是星球的半

径，则第一小段物体克服引力的功  $A_1 = \bar{F}_1 \times h$ ，即

$$A_1 \approx \frac{GmM}{R(R+h)} \cdot h = MGm \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)。$$

所以总功

$$A_{\text{总}}=A_1+A_2+\dots$$

$$\approx GmM \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) + \left( \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+2h} \right) + \dots \right]$$

$$\approx GmM \frac{1}{R},$$

于是  $\frac{1}{2}mv_{\text{逃}}^2 = \frac{GmM}{R}。$

即  $v_{\text{逃}}^2 = \frac{2GM}{R}$  或  $\frac{2GM}{R} = v_{\text{逃}}^2。$

上式表示，星球的质量越大，半径越小，则物体所需的逃逸速度越大。推而广之，如果某个天体，它非常致密，达到  $\frac{2GM}{R} \geq c^2$ ，这表示该物体所需的逃逸速度要大于光速。我们知道，没有什么物体的速度可以大于光速，所以只要满足上述条件，任何物体甚至连光都不能逃离该星球，这样的天体就变成了一个“黑洞”。黑洞条件公式（5）证毕。再说明如下：

（a）由于光子的速度不会变小，另外光的运动也不遵循牛顿定律，所以上述推导严格来讲是有问题的，所幸用严格的相对论推导的结果和上述结果相同。只是为了便于理解和记忆，做上述推导以作参考。

（b）式（5）取等号得公式

$$R_H = 2GM/c^2。 \quad (6)$$

这里  $R_H$  是质量为  $M$  的天体成为黑洞的临界半径（天体的半径可能小于  $R_H$ ）。 $R_H$  又称为视界。这表示空间的一个范围，在这个范围内的任何信息外界都“看不见”，即视觉界限。

（c）由计算可得，质量相当于太阳和地球的黑洞的半径分别为 3km 和 0.9cm，对比上述中子星的半径（9.2km），从理论上讲应该存在黑洞。

**黑洞不黑** 按上述相对论的观点，黑洞像是恒星坍缩后的残骸。这种悲观的结论多少使人接受不了。1973 年以后，霍金从量子力学观点出发提出，黑洞外的真空可自发产生虚粒子对（虚是指粒子对存活时间极短，实测不到），其中反粒子可能进入黑洞和其中的正粒子湮灭，而黑洞外留下的正粒子因反冲并摆脱黑洞的吸引，能被远处的观察者发现，其效果就像从黑洞辐射出的粒子一样。这种现象叫霍金辐射。这也就是黑洞不黑的意思。并且科学家进一步研究发现黑洞可看成是一个热力系统，它也存在一定的温度，霍金还从理论上导出了黑洞的温

度公式

$$T_H = \frac{hc^3}{8\pi GMk}。 \quad (7)$$

由于  $T$  与  $M$  成反比，说明黑洞因辐射质量减少后，它的温度不降反而升高，甚至温度会高到黑洞“蒸发”。总之，黑洞不是天体演变的终结，而是天体演变的一个阶段。

[注] 在赵峥《黑洞与弯曲的时空》一书中，有两种推导  $T_H$  的方法。一种是几率法，另外一种是用到熵的概念，但都比较复杂。下面用初等数学方法作近似推导：

根据霍金《时间简史》p100，“……黑洞越小，负能粒子在变成实粒子之前必须走的距离越短，这样黑洞的发射率和表观温度也就越大。”设  $T_H$  和  $R_H$  成反比关系，而  $R_H \propto M$ ，所以设

$$T = K/M。$$

再设黑洞的总质量  $M$  较小，则温度较高，黑洞里的质量为  $m$  的粒子的速度可以认为  $v \approx c$ ，再设粒子做圆运动，圆半径  $a \approx \lambda/2\pi$ ，且  $a \approx R_H$ 。粒子的动能

$$\frac{1}{2}mv^2 \approx kT， \text{ 所以}$$

$$T_H \approx \frac{\frac{1}{2}pv}{k} \approx \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{h}{\lambda} \right) c}{k} \approx \frac{hc}{2k(2\pi a)}$$

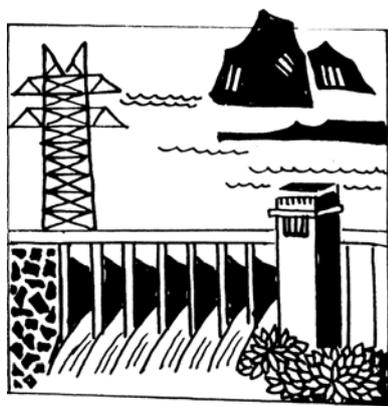
$$\approx \frac{hc}{4\pi k \left( \frac{2GM}{c^2} \right)} \approx \frac{hc^3}{8\pi kGM}。$$

**黑洞的探测** 黑洞可能从恒星坍缩而成，也可能在宇宙大爆炸时形成很多原初小黑洞，也可能在星系的“中心”存在黑洞。所以，从理论上讲，现在宇宙中应该有很多黑洞，但直到今天，还没有真正探测到黑洞。探测黑洞的途径可从以下几方面入手：测定黑洞巨大引力引起近处发光天体所做的双体运动；利用黑洞引力使光线偏折的引力透镜效应；再就是测定黑洞对近处天体中的可流动物质吸引产生的“喷流”等。

**小结：**在哈勃定律的基础上建立起来的宇宙起源学说，现在知道其中的两大预言已被证实。其一是关于元素丰度问题。按大爆炸理论，宇宙初期在极高温度条件下，氢的丰度理论计算值应在 30% 左右，而由恒星内的温度条件下算出氢的丰度只有 3%~5%。现在实测宇宙中氢的丰度确为 30% 左右，

# 传输线变压器简介

李秀娟 张敏锐



传输线变压器，顾名思义，它是在传输线和变压器理论基础上将二者有机结合而形成的新元件，它既具有变压器的性能，又有传输线的特性，因此具有频带宽的特点，通常被用在射频电子电路中。下面就传输线变压器的结构、工作原理、特点及典型应用加以简单介绍。

## 传输线变压器的结构

传输线变压器由环状磁芯和传输线构成，磁芯是用高导磁率、低损耗的铁氧体材料制成的，其直径可大可小(视功率的大小而定)，小的只有几毫米，大的有几十毫米，将传输线(扭绞线、平行线、同轴线等)缠绕在磁芯上所形成的便是传输线变压器，其结构见图1所示，它有四个端子，可分别接信号源和负载。

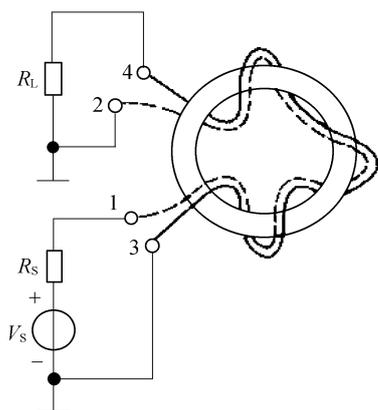


图1 传输线变压器结构图

## 传输变压器的工作原理

对于普通变压器，其本身的高频特性差。而要改善低频响应，就要增加初级线圈匝数(加大电感)，这样又导致分布电容的增大，使高频响应愈加变坏。采用高导磁率磁芯可使高、低频率特性大大改善，但磁芯都有其最佳工作频段，高于此频段时，磁芯的损耗增加，使其传输效率下降。由于分布电容和漏感的影响，即使采用了高导磁率磁芯的普通变压器，仍然不能工作在更高的频段和传递宽带信号。而新元件——传输线变压器，因其最高频率可达几百兆赫甚至上千兆赫，而常在射频段使用。

由于两根导线紧靠绕在一起，因此任意点的线间电容都是很大的，且在整个线上是均匀分布的。由于导线绕在高 $\mu$ 磁芯上，故导线每一小段的电感量是很大的，且均匀分布在整个线上。由此传输线可以看成由许多电感、电容组成的耦合链，传输线变压器正是利用这些电感和电容之间的耦合，完成了能量的传输。因此，在传输线变压器中，两线间的分布电容不但不会影响高频能量传输，而且是电磁能转换的必要条件。由于电磁波主要是在导线间的介质中传播，磁芯的损耗对信号传输的影响就会大大减少，所以传输线变压器的最高工作频率就可以大大提高，这就使传输线变压器传输高频、宽带信号成为可能。

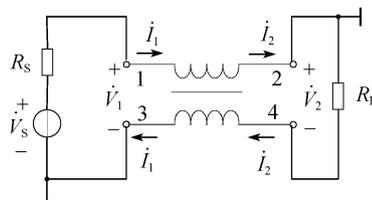


图2 传输线工作方式

其二是大爆炸理论，因膨胀降温，宇宙现在应存在3~5K的微波背景辐射，而实测微波背景辐射为2.725K，做这种测定的两位科学家还为此获得了诺贝尔奖。现在人们把哈勃定律、元素丰度和微波背景辐射作为宇宙起源理论的三大基石。

按实验—理论—再实践的认识过程，宇宙起源理论逐步被大多数科学家所接受。当然该理论还存在很多问题，例如暗物质问题、中微子质量问题、引力子问题等等，还有待进一步研究。

(海军工程大学理学院应用物理系 430033)