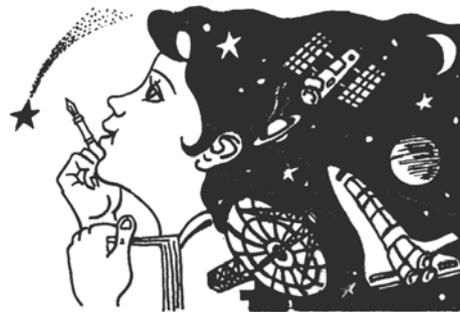


浅谈麦克斯韦方程组中的 科学美

孙 锴



科学美是一种与真、善相联系的，人的本质力量以宜人的形式在科学理论上的显现。自然界中物质深层的固有结构既然具有和谐、简洁、对称的美学特征，那么在揭示与描述其奥秘的科学理论中就应当得到充分的反映。正如德国著名物理学家海森堡所说：“自然美也反映在自然科学的美之中。”自然美以物质形态和运动过程的感性特征引发人的审美感受，表现为自然界的和谐统一。而自然科学是由建立在经验和逻辑基础之上的关于自然界各种现象及其相互关系的普遍性和精确性陈述构成的有组织的知识。自然科学的一个最核心的假设就是“一种广泛传播，出自本能的信念，相信存在着一种事物的秩序，特别是一种自然界的秩序”。这种秩序感与人的审美心理相契合。海森堡曾在他的一篇文章中引用了一句拉丁格言：“美是真理的光辉”。

物理学中的科学美是理性的美、内在的美、本质的美。虽然物理学的研究范围极为广泛，物理规律极为复杂，但物理学的美却都具有对称、简洁、和谐、多样统一等特点。麦克斯韦的光电磁统一理论是麦克斯韦等人总结法拉第等人的研究成果，进一步探索物理世界美的结晶，是经典物理学科学美的典范之一。

一、麦克斯韦方程组的物理内容和数学形式的和谐性

在 19 世纪 70 年代，库仑定律、安培定律、毕奥 - 萨伐尔定律、法拉第定律已被发现，“力线”的思想已经被法拉第引入来描述电场和磁场的许多性质，电磁学已经从牛顿力学的框架中解放出来，但是这些成果只是从不同角度总结和描述了电场和磁场的一些基本性质，直觉地抓住了它们的联系，并没有定量的从理论的高度以数学的形式来描述电磁场的基本规律。

麦克斯韦为了把法拉第论文中对电和磁之间相互关系的定性描述表达出来，并赋予它们优美的数学形式，引入了一种新的矢量函数。他利用流体的流线概念，把电力线比作不可压缩流体的流管，把

电场强度比作流速，并且提出了一个新的物理概念——场，揭示了法拉第的定性描述中所蕴涵的数学思想的精髓。经过严密的数学推导，他导出了电流和磁力线的一些物理量之间定量关系的矢量微分方程，以及电流间作用力和电磁感应定律的定量公式。当麦克斯韦公布了他三篇著名的论文：《论法拉第的力线》、《论物理的力线》和《电磁场的动力学理论》时，便宣告了电磁统一的时代到来了。他在论文引言中写道：“我提出的理论可以称为电磁场理论，因为这种理论关系到带电体或磁体周围的空间，它也可以称为一种动力学理论，因为它假定在这个空间存在着运动的物质，由此而产生了我们可观察到的电磁现象。”1865 年麦克斯韦最终建立了包括电荷守恒定律、介质方程以及电磁场方程在内的完备方程组。经过赫兹、亥维赛、洛伦兹等人进一步的整理和提炼，得到了现在我们看到的电磁场方程组——麦克斯韦方程组：高斯定律、法拉第电磁感应定律、磁通连续定律和全电流安培环路定律。麦克斯韦方程组有微分形式和积分形式两种数学表达方式，微分形式对应于空间中一点的电磁场特性，而积分形式则描述了空间中一个区域的电磁特性。

空间中电场性质由高斯定律和法拉第电磁感应定律共同给出。空间中的一个区域是由有限个物理点构成的，所以高斯定律和法拉第电磁感应定律用矢量函数的微分形式和积分形式分别予以说明。高斯定律微分形式是 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ，描述了空间中点电荷是电场强度的散度源；积分形式为 $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$ ，描述了空间中某一区域的电同量的大小有该区域所包围的电荷确定。高斯定律说明了电场是有散场，散度源为电荷。高斯定律的微分形式和积分形式共同说明了静止电荷对电场的影响。法拉第电磁感应定律微分形式是 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ，

说明了电场的旋度源是随时间变化的磁场；积分形式 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 则说明穿过闭合环路的磁通变化时，在闭合导电环内产生电流方向，感应电流的方向为阻止磁通变化的趋势。法拉第电磁感应定律揭示了变化的磁场产生有旋电场，将随时间变化的磁场和有旋电场有机的联系起来，指出时变磁场是电场的旋度源。亥姆霍兹定理指出，若是矢量场 \vec{F} 在无限空间中处处单值，且其导数连续有界，而源分布在有限区域中，则矢量场由其散度和旋度唯一确定。当高斯定律和法拉第电磁感应定律用矢量微分法方程定量地给出了电场的散度和旋度，由亥姆霍兹定理可以唯一确定一个有散有旋的矢量场——电场。

同理，磁通连续定律和全电流安培环路定律可以唯一确定磁场，体现了麦克斯韦方程组的完备性。磁通连续定律利用矢量函数的微分形式和积分形式，分别描述了空间中一点和一个区域中磁场的散度。磁通连续定律的微分形式是 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，说明磁场是无散场，没有散度源，验证了磁单极不存在；而积分形式 $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 则描述了在空间中穿过任一闭合区域的磁通量为零，也就是说磁力线始终连续，进入闭合区域的磁力线始终等于传出闭合区域的磁力线。静磁场的磁力线由 N 极出发从 S 极返回，始终连续。全电流安培环路定律结合麦克斯韦引入的“位移电流”和试验总结的安培环路定律，利用矢量函数的数学工具将电场和磁场结合了起来，消除了安培环路定律中的不自洽之处，将电场和磁场联系了起来。全电流安培环路定律的微分形式是 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，说明电流和变化的电场是磁场的旋度源；积分形式： $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$ 表明磁场不仅由传导电流产生，也能由变化的电场，即位移电流产生。

麦克斯韦方程组中高斯定律、法拉第电磁感应定律、磁通连续定律和全电流安培环路定律利用矢量微分函数作为其数学工具，分别描述了电场和磁场的散度和旋度，从理论的高度总结了法拉第以来多位科学家的试验现象，将物理内容以数学的语言做了总结和提炼。以统一为主要标志的和谐之美在

物理学中包括物理内容和数学形式两方面的统一，这就是说，物理学家从美学角度坚信物理图景的统一，并认为物理世界的一切规律原则上可以在数学中找到它们的表现形式。而麦克斯韦恰恰就做到了这一点，圆满地实现了许多人的梦想。

二、麦克斯韦方程组蕴涵的对称性与统一性

麦克斯韦对磁场变化产生感应电动势现象进行了深入的分析，发表了论文《论物理的力线》。在这篇论文中，他提出了分子涡流以太模型。基于这个模型，通过数学计算可以得出电学和磁学中全部已知的基本定律。他还发现了电磁感应定律与安培定律的不对称性。出于美学上的考虑，麦克斯韦在安培定律中引入了“位移电流”的概念：随时间变化的电场引起介质电位移的变化，这种变化与传导电流一样在周围的空间激发磁场。位移电流的概念完全是麦克斯韦的独创（而且是在没有任何实验提示的情况下，只是为了保证理论的自洽性——与电荷守恒定律兼容而大胆引入的）。位移电流假说消除了安培定律和电荷守恒定律之间的矛盾，让电学与磁学的方程具有完美的对称形式。

麦克斯韦方程组中的对称性还反映在其中所蕴涵的光的电磁理论。在自由空间中没有电荷也不存在电流，在这个区域中，应有 $\rho=0$ 和 $\vec{J}=0$ ，麦克斯韦方程组应简化为：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0, & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & c^2 \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

从数学形式上看，简化后麦克斯韦方程组具有完美的对称形式，融合了数学形式上简洁与对称。

我们将公式中的 \vec{E} 和 $c\vec{B}$ 互换，可以得到：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & c^2 \nabla \times \vec{B} &= -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0, & \nabla \times \vec{E} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

电场 \vec{E} 和磁场 \vec{B} 的散度公式经过互换后保持不变，从数学上来说，电场和磁场的散度公式是完全对称的。在物理学的概念中，反对称是指“在对称操作的基础上，加上二元（如正负）互换操作，使操作前后两图完全重合。”可以看出，旋度公式经过 \vec{E} 和 $c\vec{B}$ 互换后仅相差一个负号，也具有对称性。

物理规律的对称性是指经过一定的对称操作后, 物理定律的形式保持不变。因此, 从麦克斯韦方程组的数学形式上看, 可以认为电场强度 \vec{E} 和磁场强度 \vec{B} 具有空间对称性和时间对称性。

从物理内容上看, 麦克斯韦方程揭示了现实物理世界的对称美。在自由空间中, 全电流安培环路定律的 $c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 表明了变化着的电场会感应产生一个变化着的磁场, 而法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 说明这个变化着的磁场又会感应产生出另一个变化着的电场, 如此循环不已, 互相激发, 造成了电场和磁场在特定空间和时间上的差异, 产生了一个交替激发, 对称产生的时变电磁场。全电流安培环路定律和法拉第电磁感应定律将时变电场和时变磁场联系起来, 为我们描述出了有旋、交替产生的电磁场。在这样的电磁场中, 电场和磁场不再独立, 而是你中有我, 我中有你, 如影随形, 相伴产生。

通过对电场和磁场的旋度方程再分别取旋度, 再利用旋度的性质可以得到:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

类比数理方程中波动方程 $\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, 可以看出

电场和磁场都满足波动方程。波动方程显示这种由变化的电场和变化的磁场激发的波的传播速度均为光速, 而波的传播速度就是场的建立速度, 因此,

$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ 和 $\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ 说明了电场和磁场都是以光速建立的。而且电场和磁场波动方程具有相同的形式, 这说明电场和磁场互相感应对称产生, 也就是说从麦克斯韦方程组可以推导出统一的、具有波动性的电磁场, 称为电磁波, 电场和磁场是电磁波的两个分量。电磁波可以脱离源而辐射出去。电磁波的传播速度只与介质的电磁性质有关, 频率等于电磁场的起伏频率。在真空中电磁波以光速 c 传播, 而光速 c 与介电常数 ϵ_0 和磁化率 μ_0 相联系。根据统一性这一科学美学原理, 可以认定: 光与电磁波在本质上是一致的, 光也是一种电磁波, 它们

的区别只在于波长的不同。由此可见, 麦克斯韦方程组蕴涵了光的电磁理论, 实现了电、磁、光的和谐统一。光、电、磁三种物理现象的统一, 再一次增强了自然科学家关于世界是对称、和谐的科学美学信念。

三、麦克斯韦方程组的简洁性

麦克斯韦为了对电磁现象的各种讨论进行定量计算, 归纳出了电磁场的一般方程组, 列出了含有 20 个变量的 20 个标量方程(其中也包含了现在已不作为电磁场方程的公式, 如库仑定律、欧姆定律、安培定律、毕奥 - 萨伐尔定律、位移电流、电荷连续性原理等), 采取矢量形式可以写成 8 个方程, 即: 全电流方程, 磁力方程, 电磁场运动学方程, 电动力方程, 电位移方程, 电阻方程, 自由电荷方程和电荷连续性方程。为了把电磁场理论由介质推广到空间, 麦克斯韦还假设空间存在一种电磁以太、它的动能体现磁的性质, 它的势能体现电的性质, 它的动量通表示电磁场的运动性质和相互作用的特性。

德国的物理学家赫兹意识到场论与源论之间并不存在无法填补的鸿沟, 麦克斯韦提出的方程组过于复杂。为了把德国电动力学源论与麦克斯韦场论统一在同理论体系中, 用最简洁的数学形式表达出来, 他对麦克斯韦方程做了简化。亥维赛继承和发展了麦克斯韦与赫兹的成就, 同时又认识到为把麦克斯韦方程组中电和磁的深刻对称性简明地表示出来, 就必须对麦克斯韦方程组再行简化。经亥维赛的工作, 方程简化为:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ -\nabla \times \vec{E} &= \vec{J}_m + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

与现在通用的麦克斯韦方程组相比, 电场强度的旋度方程中多出了一个磁流项 \vec{J}_m , 它是亥维赛出于对称性考虑, 类比磁场强度的旋度方程人为加进去的。至于 \vec{J}_m 是否真的存在, 他自己也感到怀疑, 后人再整理时取消了本来不存在的 \vec{J}_m 项。于是, 经过众多科学家的不懈努力和坚持探索, 终于完成了对麦克斯韦方程组进行了简化和整理, 给出了方程组的最简单的微分对偶形式, 建立起在形式上具有完美的对称性的、简洁的麦克斯韦方程组。

漂浮在大海上的风力发电机

杨先碧

当我们在沙滩上感受到海风吹拂的时候，有没有想过这些海风也是可以充分利用的能源？最近，挪威科学家利用新的技术开发出一台建在海上的风力发电机，而且是世界上首台可以漂浮在大海上的风力发电机。

与陆地相比，海上的风更强更持续，而且空间也广阔。大海上没有密密麻麻的建筑，也没有连绵不绝的山峦，风儿在大海上就没有了阻挡。此前，不少国家已经在海边建造了一些风力发电站。但是，更多的风力资源不是在海边，而是在茫茫的大海上，风吹到海边的时候力量已经减弱不少了。然而，要利用大海上的这些风力资源也很不容易，因为没有建造风力发电机的地基。

挪威石油公司委托挪威离岸风能技术研究中心的科学家进行海上风能的利用研究，项目总投资约4亿克朗。该项目的技术总负责人约翰·奥拉夫带领数十名研究人员经过数年的奋斗，开发出可以在漂浮在海中的发电机支柱，并于近期建成一台。这台风力发电机有个形象的名字叫“海风（Hywind）”，是世界上首台悬浮式风力发电机（图1）。



图1 建设中的“海风”发电机

“海风”发电机建设在挪威的斯塔万格地区的海域中，最近每天都有不少游客到这里观光，主要就是为欣赏漂浮式风力发电机的建设过程。该发电机与陆地上的风力发电机用的材质大致相同；不同的是，其在水下的部分被安装在一个100多米的浮标上，并通过三根锚索固定在海下120米到700米深处，以便它随风浪移动，迎风发电。

“海风”发电机的功率为2.3兆瓦，其叶片直径为80米，相当于一个标准足球场的长度。发电机机舱高出海平面约65米，浮置式的发电设备安装在



$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

有了麦克斯韦方程组，只要给定初始条件，那么以后任何时刻电磁场的运动状态都可以唯一地确定，就如同牛顿定律在质点动力学中所起的完美、和谐的作用一样。麦克斯韦方程组从根本上简化了整个物理世界相互作用的图像，使物理学变得越来越“简单”了。从科学美学的角度来说，物理学变得越来越美了。

麦克斯韦方程组用像音符一样美妙而简明的数

学矢量微分方程，确定了电荷、电流、电场和磁场之间的关系，把表面上看起来毫不相关的电、磁、光现象统一在同一个规律中：变化的电场激发变化的磁场，变化的磁场激发变化的电场。这种相互变化的电场和磁场构成了电磁波，而光只是一种频率特定的电磁波，光、电、磁在本质上是一致的。麦克斯韦方程组形成了电磁场理论严密的逻辑体系，达到了经典电磁理论研究的最高境界，建立起一个简单、和谐、对称的电磁场的力学理论，在美学上既体现了其简单性：光、电、磁的统一，又体现了完美的对称性和统一性：电场和磁场的对称性和统一性，时间和空间的对称性和统一性。

（陕西西安建筑科技大学机电工程学院710055）