

# 能量条件简介

卢昌海



大家知道, 广义相对论的场方程(即爱因斯坦场方程)  $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$  是一组有关时空度规的二阶非线性偏微分方程, 求解这样的方程组极其困难。在 20 世纪 60 年代初以前, 物理学家对爱因斯坦场方程的很大一类研究都局限于在各种简化条件(比如特定的对称性)下求解场方程。这方面最著名的成果是施瓦西于 1916 年得到的施瓦西解, 其度规为( $m$  为质量参数)

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2;$$

以及弗里德曼于 1922 年得到的弗里德曼解, 其度规(通常被称为罗伯逊-沃克度规)为( $R$  为标度因子,  $k$  取值为 0、-1 或 1, 分别对应于平直、负常曲率及正常曲率空间)

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\Omega^2)。$$

这两个度规分别是广义相对论在天体物理及宇宙学上应用最为广泛的度规。但这两个解的发现也带来共同的问题, 就是它们所对应的度规均具有奇异性。

施瓦西度规是一个静态度规, 其奇异性(由上述

表达式中易于看到)出现在  $r = 0$  及  $r = 2m$  处。其中  $r = 2m$  处的奇异性(一度被称为施瓦西奇点), 后来被证明只是坐标选择导致的表观奇异性, 通过坐标变换可以消除; 而  $r = 0$  处的奇异性则是真正的物理奇点, 时空曲率在趋近该点时趋于发散, 这个奇点被称为曲率奇点。罗伯逊-沃克度规由于是一个动态度规, 其情形稍微复杂些。当  $k = 1$ (即空间具有正曲率)时这一度规在  $r = 1$  处似乎具有奇异性, 但这也是坐标选择导致的表观奇异性。除去这一表观奇异性, 从形式上看, 罗伯逊-沃克度规似乎没有其他显而易见的奇异性。但若将这一度规代入场方程中研究它的动力学演化, 就会发现对于我们观测到的膨胀宇宙来说, 只要宇宙当前的物质分布满足一个很宽泛的条件, 罗伯逊-沃克度规中的标度因子  $R(t)$  在过去某个有限时刻就必定等于零。在那个时刻(通常定义为  $t = 0$ )宇宙的空间线度为零, 物质密度则发散, 因此那是一个物理奇点, 被称为宇宙学奇点或大爆炸。

继电器(比如掺铒光纤放大器 EDFA)不能处理量子信号, 所以还必须设计一个旁路设备以方便量子光通过。在软件方面, 针对目前因特网广泛使用的 VPN 协议(比如 IPSec、PPTP 等), 还需做些修改以容纳量子密钥分配技术, 这样量子密码才能得到更广泛的应用。

由此可见, 建设量子密码网络并非易事, 还涉及网络工程和现代光通信等领域, 需要物理学家和网络工程师、通信工程师、软件工作者的通力合作。

量子密码技术作为量子信息科学的排头兵, 在将信息安全提升到一个新高度的同时, 也必将促进相关量子信息器件(如单光子源、单光子探测器、量子中继器等)的发展, 为今后更加广阔的量子通信、量子计算打下深厚的技术基础。

(安徽省合肥市中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室 230026)

## 作者简介

温浩, 男, 1981 年 5 月生于四川自贡。2003 年获得中国科学技术大学电子信息科学与技术专业学士学位, 后继续在该校中国科学院量子信息重点实验室攻读博士学位。主要研究兴趣在量子密码, 量子



密码网络的架构与实现。

郭光灿教授, 男, 1942 年 12 月 9 日生于福建惠安。1965 年毕业于中国科学技术大学无线电电子学系, 2003 年当选为中国科学院院士。现任中国科学院量子信息重点实验室主任, 中国物理学会量子光学专业委员会主任, 国家科技部 973 项目“量子通信与量子信息技术”首席科学家, 国家基金委创新研究群体学术带头人。



很明显,出现这些奇点是物理学家并不乐见的,因为物理世界中并不存在真正意义上的无穷大。对于一个物理理论来说,出现无穷大往往意味着失效,因此出现奇点对广义相对论是一种危机。不过当时物理学家所知道的爱因斯坦场方程的解十分有限,而且这些解大都具有很高的对称性(因为只有这种情形下的场方程才容易求解),比如施瓦西解具有球对称性、弗里德曼解则是均匀及各向同性的。这就给物理学家提出一个问题:由这几个特殊解所引发的危机究竟有多大的普遍性?或者说,奇点会不会只是那几个解所具有的特殊对称性导致的特殊效应(如果是的话,危机就不算太严重,因为那些对称性在现实世界里是不可能绝对严格实现的)?

在20世纪60年代,物理学家对这一问题有两种看法。一种看法认为出现奇点只是对称性导致的特殊效应,如果考虑一般(即没有严格对称性)情形,将不会出现奇点。持这种观点的代表人物是前苏联的栗弗希茨、卡拉特尼柯夫、伯林斯基等。与之相反的另一看法则认为奇点在广义相对论中出现具有普遍性,持这种观点的代表人物是英国的彭罗斯与霍金等。这两组物理学家在奇点问题上不仅观点迥异,而且在研究中所用的具体方法也很不相同。栗弗希茨等人主要把精力放在求解一般情形(即没有严格对称性)下的场方程,以便探讨在这种情形下理论是否不存在奇点;而彭罗斯与霍金等人则大量运用微分几何手段,通过所谓的全局方法,在不直接求解场方程的情况下对奇点及奇点产生的条件进行系统分析。如果说栗弗希茨等人的方法是正面强攻,那么彭罗斯与霍金等人的方法则属于旁敲侧击。经过几年努力,两种方法分出了高下。栗弗希茨等人的正面强攻收效不大。爱因斯坦场方程委实太过复杂,虽然栗弗希茨等人并不贪婪,只研究宇宙学奇点 $t=0$ 附近的解而非全局性解,同时采用近似手段,并不奢望精确求解,但在不具对称性的情况下,他们的努力依然遇到难以逾越的困难。另一方面,彭罗斯与霍金等人的旁敲侧击却获得了极大成功,他们证明了一系列被称为奇点定理的著名结果,成为经典广义相对论中登峰造极的成就之一。

不过彭罗斯与霍金等人的方法虽然无需直接求解场方程,但它与描述物质分布的能量动量张量的性质依然关系密切。这一点从物理上讲显而易见,因为正是物质分布决定了时空结构。爱因斯坦曾把

他的场方程比喻为一座建筑,这座建筑一半用精美的大理石砌成,另一半却用劣质木料建造。用精美大理石砌成的一半是方程左端 $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ ,是一个描述时空结构的优美几何量,被称为爱因斯坦张量。而用劣质木料建造的另一半则是方程右端,即描述物质分布的能量动量张量 $8\pi GT_{\mu\nu}$ 。为什么说这部分是用劣质木料建造的呢?因为自然界的物质分布种类繁多、物态方程千差万别,找不到一个描述所有已知物质分布的普适能量动量张量。不仅如此,在广义相对论所涉及的许多极端条件(比如某些星体内部的超高温、超高压、超高密度,宇宙演化的早期,以及引力坍缩的后期等条件)下还可能大量未知的物质形态与分布。而且所有这些物质分布还可能在空间及时间上相互混合。因此与爱因斯坦张量所具有的完全确定的数学结构相比,我们有关能量动量张量的知识极其贫乏。

用这种贫乏的知识,如何研究诸如奇点的产生条件这样与物质的形态与分布密切相关、同时又具有很大普遍性的课题呢?彭罗斯与霍金等人采用的手法非常高明——虽然谁也无法写下一个具有普适性的能量动量张量,但这一张量应当具备的某些基本条件(比如能量密度必须大于等于零)在当时看来具有很大的普适性,因此他们假定物质分布满足这些基本条件;另一方面,他们所用全局方法的威力之一就在于,只要利用那些基本条件,无需知道能量动量张量的具体形式,就可得到许多非常有价值的结果。那些结果便是他们所证明的一系列奇点定理,而那些附加在能量动量张量上的条件则被统称为能量条件。如果说能量动量张量是用劣质木料建造的,那么能量条件的引进就好比是套上几道铁箍对那些劣质木料进行加固,使它比原先的松散形式结实耐用。

### 能量条件

在具体介绍能量条件之前,我们首先简单分析一下能量动量张量本身的形式。为了尽可能简化度规张量的形式,人们通常在所谓的正交标架场下对此加以讨论。正交标架场(以下简称标架场)由一组正交归一的基矢量 $(e_a)^\mu$ 张成,其中拉丁字母 $a, b, \dots$ 标识标架场的基矢量,希腊字母 $\mu, \nu, \dots$ 则表示基矢量的时空指标。标架场的基矢量满足正交归一条件 $\eta^{ab}(e_a)^\mu(e_b)^\nu = g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}(e_a)^\mu(e_b)^\nu = \eta_{ab}$ 。很明显,标架场不是唯一的,对一个标架场做局域洛伦

兹变换得到的仍是标架场。由于洛伦兹群具有旋量表示,而切空间中的一般线性变换群  $GL(4, R)$  则没有旋量表示,因此标架场在讨论引力场与旋量场的相互作用时是非常重要的工具。对于我们所要讨论的能量条件来说,标架场的优点在于能量动量张量在标架场中的分量具有明确的测量意义。

霍金曾把标架场下的能量动量张量分为四种类型,每种类型均可通过标架场中的洛伦兹变换约化为一个正则形式。这其中最重要的是第 I 类,其正则形式为

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p_1 & & \\ & & p_2 & \\ & & & p_3 \end{pmatrix}$$

其中  $\rho$  为标架场中的静止观测者(即世界线切线沿基矢  $e_0$  方向的观测者)测量到的能量密度,  $p_i$  则为沿三个正交空间方向的主压强。除极少数特殊情形外,这种类型的能量动量张量涵盖了几乎所有物理上有意义的物质分布情形,我们将只讨论这种类型。

熟悉线性代数的读者可能会提出这样一个问题:那就是第 I 类能量动量张量的正则形式其实就是该张量的对角化,但能量动量张量是一个实对称张量,按照线性代数中熟知的定理,实对称张量必定可以通过正交变换对角化。既然如此,能量动量张量岂不都应是第 I 类的?为什么在霍金的分类中会出现不只一种类型呢?其原因在于普通线性代数所讨论的内积空间具有正定的度规,而广义相对论中的时空度规不是正定的。

现在可以简单介绍一下能量条件了。物理学中常用的能量条件主要有以下五种。

I. 弱能量条件 对所有类时矢量  $V_a, T^{ab} \cdot V_a V_b \geq 0$ 。利用  $T^{ab}$  的正则形式可以证明,弱能量条件等价于  $\rho \geq 0, \rho + p_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$ 。充分性的证明非常简单:取  $V_a = e_0$  (即静止观测者)可得  $\rho \geq 0$ , 取  $V_a \rightarrow e_0 + e_i$  (注意  $V_a$  是趋于而非等于  $e_0 + e_i$ , 因为后者是类光的)则可得  $\rho + p_i \geq 0$ 。下面再证必要性:假设  $\rho \geq 0, \rho + p_i \geq 0$ , 则  $T^{ab} V_a V_b = \rho V_0^2 + \sum_i p_i V_i^2 \geq \rho (V_0^2 - \sum_i V_i^2) \geq 0$ 。其中第一个“ $\geq$ ”用到了  $\rho + p_i \geq 0$ , 第二个“ $\geq$ ”用到了  $\rho \geq 0$  及  $V_a$  类时。

弱能量条件中最重要的部分是  $\rho \geq 0$ , 表明能量密度处处为正。需要注意的是,虽然上面的推导是

在使正则形式成立的特殊标架场中进行的,但  $\rho \geq 0$  这一结果适用于沿任意类时世界线运动的观测者所测得的能量密度。由于物理上可以实现的所有观测者都是沿类时世界线运动的,因此弱能量条件表明任何物理观测者测得的能量密度都处处为正。

在弱能量条件中让  $V_a$  趋于类光矢量  $k_a$ , 由能量条件的连续性可以得到一个新的能量条件——零能量条件。

II. 零能量条件 对所有类光矢量  $k_a, T^{ab} K_a K_b \geq 0$ 。显然,零能量条件等价于  $\rho + p_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$ , 是一个非常弱的条件,比弱能量条件更弱。

III. 强能量条件 对所有类时矢量  $V_a, [T^{ab} - (1/2)g^{ab}T] V_a V_b \geq 0$ 。由于爱因斯坦场方程可改写为  $R^{ab} = 8\pi G [T^{ab} - (1/2)g^{ab}T]$  (其中  $T = T^a_a$  为能量动量张量的迹), 因此强能量条件等价于几何条件  $R^{ab} V_a V_b \geq 0$ 。从物理上讲,强能量条件等价于  $\rho + \sum_i p_i \geq 0, \rho + p_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$ 。证明这一点非常简单,只需将  $T^{ab} - (1/2)g^{ab}T$  表示为正则形式,然后做与弱能量条件相同的论证即可。

显然,强能量条件比零能量条件强。但是与强弱二字正常含义不符的是,强能量条件与弱能量条件互不包含,而非前者强于后者。事实上,多数物质的主压强  $p_i$  是正的,对于这些物质,强能量条件其实比弱能量条件还弱。有读者可能会问,既然强能量条件并不比弱能量条件强,那为什么会有这样的命名呢?这是由于强能量条件可以写成  $T^{ab} V_a V_b \geq (1/2)T$ , 而弱能量条件为  $T^{ab} V_a V_b \geq 0$ , 由于通常  $T \geq 0$ , 因此如果把这两个能量条件视为对  $T^{ab} V_a V_b$  的约束条件,则强能量条件比弱能量条件强。当然这种命名理由也是不严格的,因为  $T \geq 0$  本身就是一种能量条件(即下面要介绍的迹能量条件),而非无条件成立的物理事实。

IV. 主能量条件 对所有类时矢量  $V_a, T^{ab} \cdot V_a V_b \geq 0$ , 并且  $T^{ab} V_b$  非类空。这个能量条件是在弱能量条件之上增添能流密度矢量  $T^{ab} V_b$  非类空这一额外限制。在正则形式下,这一额外限制可以表述为  $\|T^{ab} V_b\|^2 = \rho^2 V_0^2 - \sum_i p_i^2 V_i^2 \geq 0$ 。取  $V_b \rightarrow e_0 + e_i$  可得  $\rho^2 \geq p_i^2$ , 这比弱能量条件中的  $\rho + p_i \geq 0$  要强。为了证明  $\rho^2 \geq p_i^2$ , 也是保证额外限制成立的充分条件,只需注意

$$\|T^{ab} V_b\|^2 = \rho^2 V_0^2 - \sum_i p_i^2 V_i^2 \geq \rho^2 (V_0^2 - \sum_i V_i^2) \geq 0,$$

这里第一个“ $\geq$ ”用到了  $\rho^2 \geq p_i^2$ , 第二个“ $\geq$ ”用到了  $\rho \geq 0$  及  $V_b$  类时。将这一结果附加到弱能量条件上可得: 主能量条件等价于  $\rho \geq |p_i| (i=1, 2, 3)$ 。从定义及上述结果均可看出, 主能量条件比弱能量条件强(从而也比零能量条件强), 但它与强能量条件互不包含。

看到这里, 有些读者可能会产生疑问: 主能量条件中的额外限制是说能流密度矢量非类空。我们知道, 在相对论中如果一个四维矢量类空, 就必定可以找到参照系, 使该矢量的时间分量为负。对于能流密度矢量来说, 时间分量就是能量密度, 因此如果能流密度矢量类空就说明必定存在一个参照系, 在其中能量密度为负。但弱能量条件已经表明任何物理观测者测得的能量密度都处处为正, 这岂不等于排除了能流密度矢量类空的可能性? 如果这样的话, 主能量条件中的额外限制变成了弱能量条件的推论, 而这两种能量条件岂不变成等价的了? 这种推理显然是错误的, 但它究竟错在哪里呢? 有兴趣的读者不妨思考一下, 以加深对能量条件及其观测意义的理解。

V. 迹能量条件  $T \equiv T_a^a \geq 0$  是我们介绍的最后一种能量条件, 它的表述与度规张量的符号约定有关, 在本文中我们所用的约定是  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。如果做相反的约定, 则迹能量条件

的表述为  $T \leq 0$ 。在正则形式下, 迹能量条件等价于  $\rho - \sum_i p_i \geq 0$ , 它与其他能量条件互不包含。

上面介绍的这几种能量条件有一个共同特点, 那就是它们给出的是每个时空点上能量动量张量所满足的条件, 这样的能量条件被称为逐点能量条件。除逐点能量条件外, 人们还常常使用另外一类能量条件, 称为平均能量条件, 它们给出的是能量动量张量沿特定的时空曲线(通常是类时或类光曲线)所满足的平均意义上的条件。平均能量条件比相应的逐点能量条件弱, 因为它们允许逐点能量条件在局部意义上被破坏——只要这种破坏能被所涉及的曲线上其他区段的贡献所弥补即可。

在本刊接下来的几期中, 笔者将陆续向大家介绍广义相对论中一些重要而优美的结果, 比如奇点定理、正质量定理、宇宙监督假设、虫洞物理等。我们将会看到, 能量条件在那些结果中有着重要应用。

#### 作者简介

卢昌海, 1971年出生于浙江杭州, 1994年毕业于上海复旦大学物理系, 后赴纽约哥伦比亚大学从事理论物理学习及研究, 2000年获物理学博士学位。现旅居纽约。个人主页: <http://www.changhai.org/>。



## 科苑快讯

### BEPC II 高质量结束

#### 第二轮同步辐射运行

BEPC II 第二轮同步辐射运行

于 2007 年 7 月 31 日上午 8 点圆满结束。本轮运行从 2007 年 6 月 15 日开始, 通过系列机器研究, 束流流强、寿命和轨道稳定性相比第一轮运行有了较大提高。至 2007 年 7 月 31 日 8:00, 累计为同步辐射供光 793 小时, 积分流强 85.98 安培小时, 硬件故障 17.8 小时, 尤其是 21~31 日连续 240 小时无故障。储存环 8 小时定时注入, 供光流强从 188mA 到 75mA, 4W2 GAP 18mm, 轨道可以实现慢反馈控制, 这些标志着 BEPC II 同步辐射运行已达到相当高的水平。

在供束初期, 出现了束流寿命偏低而且不随流强降低而升高的现象, 同时伴随有束流轨道偶尔的跳变。为此, 加速器中心积极展开一系列研究, 通过对束流轨道变化数据的分析, 找到并排除了一块六

极铁线包的短路故障, 提高了束流寿命。同时加速器中心还适时展开机器研究, 对供光模式和工作路径作了一系列优化, 在保持束流寿命前提下, 将 4W2 GAP 从 23mm 压低到 18mm, 大大提高了高压站光强。

在稳定供光的基础上, 加速器调束人员精益求精, 对轨道稳定性作了跟踪研究, 一方面寻找导致轨道慢漂的源头, 一方面展开轨道慢反馈研究。本轮供光结束前, 轨道慢反馈已投入试运行, 束流轨道稳定度最好可控制在正负 5 微米左右。

(转载自中国科学院高能物理研究所《高能新闻》)

