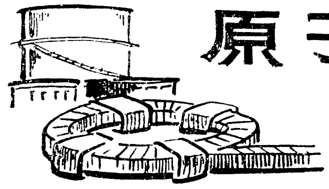
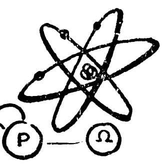
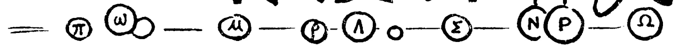


原子、夸克和 $1/N$ 展开





如果假定夸克可以有 N（一个大数）种颜色而不是三种，那么量子色动力学中当前不可解的问题就可能获得有用的近似解.

一 夸克和胶子

大多数粒子物理学家现在都相信，质子、中子和其他强相互作用粒子都是由叫做“夸克”和“胶子”的更基本的组分构成的；夸克和胶子带有一种新型的荷——色荷，它们之间的相互作用由量子色动力学（QCD）来描写. 夸克像电子一样，是服从狄喇克方程的自旋为 1/2 的点粒子. 电子具有电荷，而夸克带有色荷. 胶子像光子一样，是自旋为 1 的粒子. 光子传递电磁力，而胶子传递色力.

人们所以认为量子色动力学是目前最好的强相互作用理论，是由于少数几个半定量的检验，大量的间接证据，以及它对于强相互作用的许多定性事实能够做出明显的解释. 从原则上讲，量子色动力学是一个关于强相互作用的普遍理论，它可以描写强相互作用粒子的所有性质. 理论上，我们喜欢使用量子色动力学去计算强相互作用粒子的质量、寿命、磁矩、散射率和其他性质.

实际上，由于数学上的困难，我们不能从这个理论做出某些最有意义的问题的预言；例如，关于粒子的质量和量子数的预言. 我们甚至回答不了某些最基本的初步问题，例如所谓“夸克禁闭”问题. 虽然人们相信量子色动力色中的基本组分是夸克和胶子，但是至今许多分出单个夸克的尝试都失败了. 大多数理论家现在都相信，夸克和胶子永远被禁闭在束缚态中，这些束缚态被认为是实际观察到的粒子——质子、中子等等.

许多间接论据表明，量子色动力学的实际行为就是这样，并且一些很有意义的新的数值计算也支持这种观点. 然而，由于这个理论的极大复杂性，现在还作不出能够表明在量子色动力学中实际发生夸克禁闭的解析推导或物理论证.

试图克服 QCD 的数学困难的一个有意义的方法是最早由杰勒德·特虎夫特（G. 'tHooft）于 1974 年提出的“$1/N$ 展开”. 这个方法尽管也受到数学困难的限制，但是它已经提供了若干有意义的见解. 因为 $1/N$ 展开法中的推理有点抽象，我们先叙述原子物理中某些简单情形下的 $1/N$ 展开.

二 原子物理

我们考察熟知的氢原子的哈密顿量：

$$H=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r}. \tag{1}$$

有人也许会认为，对于小的 e^2，把这个势能当作微扰来处理，就可以理解氢原子.

然而，这是行不通的；因为 e^2 不是无量纲的量，e^2 的值决定于单位的选取，所以说 e^2 是“大的”或“小的”是没有意义的. 在按 $r\to tr$，$p\to p/t$（$t=1/me^2$）改变标度之后，哈密顿量变为

$$H=(me^4)\left(\frac{p^2}{2}-\frac{1}{r}\right). \tag{2}$$

我们看到，耦合常数 e 仅出现在整个哈密顿量的一个公共因子 me^4 中，它只是起着确定能量的总标度的作用. 因此，除了长度和能量（或时间）的总标度之外，氢原子物理是与 e^2 无关的. 按 e^2 作微扰展开是不能给我们以启发的.

氢原子是一个没有自由参数的问题的简单例子，因为它可以由约化哈密顿量

$$\hat{H}=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{r} \tag{3}$$

来描述，其中没有自由参数. 同样，对其他的原子和分子也可以用经改变标度把 e^2 提出的约化哈密顿量来描述. 没有自由参数，就没有微扰展开. 显然，在这种情况下，除了求精确解或用计算机求数值解外，我们没有别的选择. 但是，如果我们不能把哈密顿量严格对角化，甚至计算机求解也不可能，那么又该怎样做？

为了取得进展，我们必须做某种类型的展开. 因为没有明显的展开参数，所以必须找出一个隐参数. 也就是说，我们必须找出一个通常看作是已知的和固定的量，在这里可以作为自由可变的参数来处理. 例如，我们不在三维空间而在 N 维空间中研究原子物理. 我们可以看到，对于大的 N 可以用 $1/N$ 展开来解原子问题.

例如氢原子问题，我们应当解薛定谔方程

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2-\frac{e^2}{r}\right)\psi=E\psi \tag{4}$$

（采用 $\hbar=1$ 的单位制）. 对 S 波态，ψ 仅是 r 的函数，于是在 N 维空间中的薛定谔方程化为

$$\left[-\frac{1}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{N}{r}\frac{d}{dr}\right)-\frac{e^2}{r}\right]\psi=E\psi. \tag{5}$$

（实际上，方程(5)中的 N 应为 $N-1$. 但对于大 N，这个差别可以忽略.）进行变换 $H\to r^{N/2}Hr^{-N/2}$，再按定义 $r=N^2R$ 来改变径向坐标的标度，则氢原子的哈密顿

量化为

$$H = \frac{1}{N^2}\left(-\frac{1}{2mN^2}\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{8R^2 m} - \frac{e^2}{R}\right). \quad (6)$$

从式(6)出发，用 $1/N$ 展开法求得氢的结合能为

$$E = \left(\frac{1}{2}me^4\right)4N^{-2}\left(1 + \frac{2}{N} + \frac{3}{N^2} + \cdots\right), \quad (7)$$

而从哈密顿量严格对角化得到的精确结果是

$$E = \left(\frac{1}{2}me^4\right)4(N-1)^{-2}. \quad (8)$$

由式(7)和式(8)比较可见，当 $N = 3$ 时用 $1/N$ 展开得到的结果是相当不错的.

把 $1/N$ 展开法用于求解氦原子问题时，也得到了相当好的结果.

三　量子色动力学

像在原子物理中一样，在量子色动力学中也可以通过改变标度把耦合常数从问题中提出. 在量子色动力学中，一个夸克发射一个胶子的几率振幅正比于夸克的“色荷” g，g 就是 QCD 的“耦合常数”. 应用重整化群可以证明，g 没有特定值，它的值与所考察过程的能量尺度有关. 在很高的能量下，g 变得很小(此即所谓渐近自由). 耦合常数 g 的这种可变性使我们有可能对这个理论的高能行为作出确切的预言. 这些预言是大多数从实验上检验 QCD 的尝试的基础. 但是，g 的可变性也意味着，微扰论不可能解答未解决的主要问题. 因为 g 是可变的而且依赖于能量，适当规定能量的总标度就可以把它的数值吸收进去. 这样，除了这个总的能量标度，什么都不依赖于耦合常数，因此微扰论不可能解答诸如阐明禁闭和预言质量谱等未解决的问题. 为了解决这些问题，我们必须设法解决在 QCD 中明显缺少适当的展开参数的问题. 特虎夫特于 1974 年最先提出的 QCD 的 $1/N$ 展开就是解决这个问题的一种尝试.

为了说明 $1/N$ 展开，必须稍微细致地说明一下 QCD. 在 QCD 中，实际上夸克的类型并不只是一种，而是有三种类型或三种“颜色”的夸克(忽略“味道”自由度). 在本文中，我们将用数字来标记夸克的颜色：q^i 就是第 i 种类型(颜色)的夸克，i 可以等于 1，2 或 3. 各种类型的夸克都同等地参与强作用.

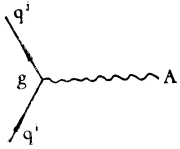


图　1

在 QCD 中，基本过程之一是夸克发射胶子：夸克⟶夸克＋胶子. 初态夸克和末态夸克各有三种颜色，胶子场是色空间的 3×3 矩阵 A^i_j. 因此，最一般的允许过程是 q^i 型夸克发射 A^i_j 型胶子而变成 q^j 型夸克(图 1). 因为胶子场 A^i_j 必须是零迹矩阵，所以它只有 8 个而不是 9 个独立分量.

特虎夫特于 1974 年引入的新办法就是从这一点着手. 他建议把夸克颜色从 3 种推广为 N 种，夸克仍记作 q^i，但现在 i 的取值是从 1 到 N. 这样，胶子场便是 $N \times N$ 矩阵. 特虎夫特证明了，量子色动力学对于大 N 可以简化. 虽然至今离能够使用 $1/N$ 展开解决我们最想要解决的问题还差得很远，但是这个简化已经导致了某些相当有意义的见解.

量子色动力学对于大 N 可以简化的基本理由很简单. 对于大 N，胶子场 A^i_j 有 $N^2 - 1$ 个分量. 因此，可以在费曼图中作为中间态出现的胶子总共有 $N^2 - 1$ 种，费曼图便含有从大量可能的中间态产生的大的组合因子. 当 N 很大时，只是带有最大可能的组合因子的一类图需要计入，于是理论便得到简化.

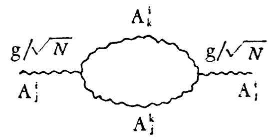


图　2

我们来具体考察对于胶子“真空极化”最低阶的贡献(图 2). 一个胶子可以分裂成两个胶子，然后又重新结合成一个；这就是对于胶子传播子的最低阶的“量子改正”. 不难看出，初态和末态不论怎样选择，在图中的中间态都有 N 种可能性. 如果初态胶子是 A^i_j 型的，它可以分裂为一对胶子：一个是 A^i_k 型的，一个是 A^k_j 型的，其中 k 是任意的. 因为有 N 种可能的 k 值，所以有 N 种可能的中间态.

在量子力学中，我们总是需要对所有的中间态取和. 因此，这个图的贡献是正比于由于对 N 个不同的中间态取和而得到的一个组合因子 N. 如要量子色动力学对于大 N 具有一个平滑的极限，那么就必须设法消去这个因子 N. 不然，对于大 N 情况，会出现发散，我们便没有可能构成有用的量子色动力学.

只有一个消除组合因子 N 的办法. 必须记住，在我们的计算中，对于两个顶角中的每一个都有一个耦合常数因子. 如果我们选择耦合常数为 $g/\sqrt{N}$，其中 g 当 $N\to\infty$ 时保持不变；因为 $N(g/\sqrt{N})^2 = g^2$ 与 N 无关，所以 N 的因子全都从图 2 中消去. 这就是可以给出单圈图的平滑极限的耦合常数的唯一选择. 任何另外的选择，耦合常数因子将抵消不掉组合因子，而 QCD 的大 N 极限将不存在.

总之，选 $g/\sqrt{N}$ 为耦合常数是一个决定性的选择. 复杂的图在每个顶角处将有一个因子 $g/\sqrt{N}$，除非像简单的单圈图那样，有足够大的组合因子以消除在顶角处的因子，否则对于大 N 它们将等于零. 其结果是，对于大 N 来说，只是具有最大组合因子的一类图得以保留，而其余所有的图都随 $N\to\infty$ 而消失.

例如图 3 中的两个三圈图，各由其六个顶角贡献一个因子 $(g/\sqrt{N})^6$. 对各种中间态取和得出，第一个图有一个组合因子 N^3. 因为 $N^3(g/\sqrt{N^6}) = g^6$ 与 N

无关，所以这个图对于大N仍然保留而且有平滑的极限．然而，第二个图仅有一个组合因子N，对于大N来说将按$1/N^2$而消失．

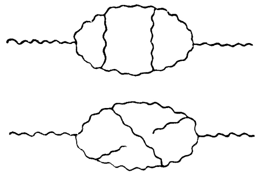


图 3

特虎夫特最早确定，在大N下仍能保留的一大类图是所谓"平面图"．平面图指的是在平面上可以画出且任两条线都不相交的那种图．图3中第一个图是平面图；第二个图则不是平面图，因为把它完全画在平面上时会有两条胶子线在图的中心相交．平面图是广泛的一类图．图4给出了一个典型的多圈平面图．对于这些平面图求和显然是一项非常艰巨的任务．如果$1/N$展开有可能成为理论粒子物理的一个实际的重要工具，那么我们就应当努力去完成这项任务．

自从1974年特虎夫特首先提出$1/N$展开以来，这个问题已经成为相当深入细致的研究课题．我们对它已经有了相当的理解，但是迄今还没有取得多少实质性的进展．

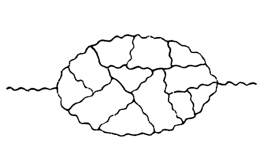


图 4

如果我们能够对平面图求和，我们就能够按$1/N$最低阶的近似预言粒子的寿命、质量、磁矩以及其余各量．实际上，即使不能够对平面图求和，我们也可以在量子色动力学现象学的理解上更为深入．因为每个平面图都保有一定的"选择定则"或定性的性质，而这些定则或性质为非平面图所破坏．这些选择定则可以看作是$1/N$展开的预言或者检验，并且为实际观察所证实．因此，如果我们假设$1/N$展开是实际世界($N=3$)一个好的近似，我们就能够借助于$1/N$展开来理解强相互作用的若干性质，而这些性质用别的方法是不好理解的．反之，选择定则的成功又促使我们确信$1/N$展开对实际世界是适用的．

$1/N$展开的选择定则大体上与原子物理或核物理中的选择定则类似．例如，即使对于核的相互作用和波函数没有充分的了解，根据我们已知的相互作用的一般性质，也可以预言电偶极跃迁比四极跃迁快．同样，虽然我们不能对平面图求和，但从平面图占优势的事实也可以对QCD在$N\to\infty$时的行为做出某些预言．下面举几个例子．

实际上观察到自旋为1而电荷不同的介子有ρ^+、ρ^0和ρ^-三种，它们的质量近似相等（约为770MeV)．这是因为强相互作用是同位旋转动不变的，而这三种介子的区别又仅在于它们的同位旋的取向不同，它们构成"同位旋三重态"．

但是，还有第四个自旋为1的粒子ω，它的质量与ρ^+、ρ^0和ρ^-几乎相等(约为784MeV)．ω在同位旋方面与ρ无关，它是一个"同位旋单态"．没有对称性的理由可以说明ω与ρ具有相同的质量，那么为什么它们的质量如此接近呢？

$1/N$展开提供了一个可能的答案．我们不能通过平面图的取和按$1/N$最低阶近似确定ρ和ω具有多大质量．但是容易证明，平面图对ρ与ω没有区别，因此给它们以相同的质量．于是，到$1/N$最低阶的ρ与ω具有相等的质量．在实际世界中它们的质量近似相等就表示，即使当$N=3$时，$1/N$展开也可以是一个好的近似．

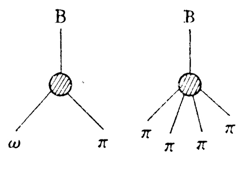


图 5

作为另一个例子，我们来考察质量为1237 MeV的B介子，它可以蜕变(图5)为4个π介子：$B\to\pi\pi\pi\pi$．对于这个蜕变，有可能先通过一个共振态$B\to\omega\pi$，跟着再发生蜕变$\omega\to\pi\pi\pi$．

这样就产生了B蜕变中通过共振态的和非共振态的各占多少的问题．我们不知道怎样对平面图求和，所以不能预言这两种过程的蜕变率．然而，通过N的幂次的计算容易证明，就与N的关系说，共振蜕变的几率幅与$1/N^{1/2}$成比例，而非共振蜕变的几率幅与$1/N^{3/2}$成比例．因此，至少对于大N我们可以预言，共振蜕变将占优势．与每一个非共振蜕变对应的共振蜕变的个数应当是N^2级的．观测表明，共振过程占很大的优势．这就再一次增强了我们认为$1/N$展开是一个好的近似的信心．

最后一个例子是：为什么自然界中不存在介子-介子束缚态？例如，为什么没有$\pi^+\pi^+$束缚态或K^0K^0束缚态；前者应是一个电荷为2的介子，后者的电荷应为零而奇异数应为2？（粒子物理学家把这样的态叫做"外来态"．）

可以证明，至少对于大N来说，这种束缚态应当不存在，因为要画出一个描写例如两个π^+介子散射的平面图简直是不可能的．任何描写两个π^+介子散射的图必然包含非平面的胶子交换，因而它将是$1/N^2$阶的．尽管我们不能够对带有非平面胶子交换的图求和；但是我们可以认为两个π^+介子之间的相互作用势是$1/N^2$阶的．因此，如果N很大的话，这个势就很弱．又已知$\pi^+\pi^+$势是一种短程势，因为它涉及到强相互作用粒子的交换，而所有这些粒子都是具有质量的．因为一个弱的短程势不会产生束缚态，所以至少对于大N，不存在$\pi^+\pi^+$束缚态．这个论证与π介子的任何特性无关，因而对所有外来道全都适用．不存在外来束缚态，对于$1/N$展开来说又是一个令人鼓舞的信号．

（何祯民 编译）