



静电透镜

——2021年国际物理奥赛理论第二题

张宏根¹ 宋峰²

(1. 浙江省杭州学军中学 310009; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

本题研究用于聚焦电子的静电透镜,推导出静电透镜的成像公式。以及考虑实际充电的暂态过程对静电透镜的焦距的修正。

考虑一个半径为 R 、总电荷量为 q 的均匀带电金属环。该金属环是一个厚度为 $2a$ ($2a \ll R$)的空心环面,该厚度在本题的A、B、C和E部分可以忽略。如图1所示,建立一个直角坐标系, xy 平面与环面重合, z 轴垂直于环面。在A部分和B部分,可能需要使用如下公式(泰勒展开):

$$(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon-1)x^2, \text{ 当 } |x| \ll 1$$

A. 环轴上的静电势(1分)

A.1 计算环轴上 z 处的静电势 $\Phi(z)$ (图1中的A点)。(0.3分)

A.2 假设 $z \ll R$,将静电势 $\Phi(z)$ 展开到 z 的最低阶。(0.4分)

A.3 一个电子(质量为 m 、电荷为 $-e$)被放置在图1中的A点($z \ll R$)。试求出作用在电子上的力。对所求出的力的表达式进行观察,确定 q 的符号,以使得电子能够以振荡的形式运动。运动的电子不影响环上的电荷分布。(0.2分)

A.4 计算上题中电子振荡时对应的谐振子的角速度 ω 。(0.1分)

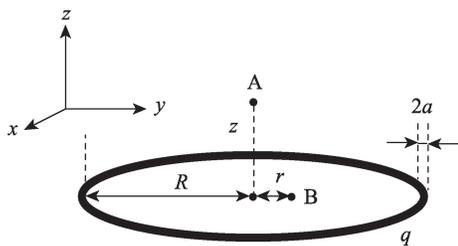


图1 一个半径为 R 的带电圆环

B. 环面上的静电势(1.7分)

在B部分中,我们来分析环面($z=0$) $r \ll R$ 处的静电势 $\Phi(r)$ (图1中B点)。静电势 $\Phi(r)$ 可以展开至 r 的最低阶: $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ 。

B.1 求出 β 的具体表达式。可能会用到前面给出的泰勒展开公式。(1.5分)

B.2 把一个电子放置在B点(如图1, $r \ll R$)。试求出作用在电子上的力。观察电子受力的表达式,确定 q 的符号,以使得电子将以简谐振动的形式运动。运动的电子不影响环上的电荷分布。(0.2分)

C. 理想静电透镜的焦距:瞬时充电(2.3分)

静电透镜是一种聚焦电子的装置。让我们考虑如下结构:金属环垂直于 z 轴放置,如图2所示。有一个能够产生一维非相对论性电子波包的电子源,产生的电子的动能为 $E = mv^2/2$ (v 是电子的速度),它们在某个可精确控制的时刻离开电子源。金属环在大部分时间都是中性的,但是在电子到环面的距离小于 $d/2$ ($d \ll R$)时(图2中的阴影区域,被称作“活跃区域”)金属环的电荷变为 q 。在C部分假设充电和放电的过程是瞬时的,电场也瞬间“填满空间”。可以忽略磁场的影响,而且电子在 z 方向的

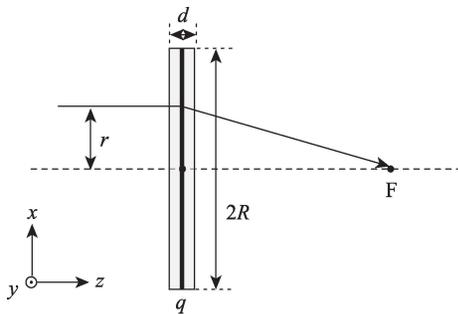


图2 静电透镜的一个模型

速度恒定。运动的电子不会影响环上的电荷分布。

C.1 确定这个透镜的焦距 f ,结果用B.1中的常数 β 和其他已知量表达。假设 $f \gg d$,且假设在到达“活跃区域”之前电子波包的运动平行于 z 轴且 $r \ll R$ 。 q 的符号使得透镜是聚焦的。(1.3分)

实际情况中,电子源被放置在 z 轴上距离环中心 $b > f$ 处。考虑电子在到达“活跃区域”之前不再平行于 z 轴,而是这个点源以相对于 z 轴在角度 $\gamma \ll 1$ 的范围内以不同的角度发射。电子被聚焦在距离环中心距离为 c 的一点。

C.2 确定 c ,用B.1中的常数 β 和其他已知量表示结果。(0.8分)

C.3 薄透镜的成像公式 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$ 对于静电透镜是否依然成立?通过计算 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 来验证。(0.2分)

D. 作为电容器的金属环(3分)

此前考虑模型是理想化的,因为我们假设金属环是瞬时充电的。因为金属环同时也是一个电容为 C 的电容器,因此实际的充电过程并不是瞬间完成。在D这个部分,我们将要分析这个电容器的性质,也许会需要如下的积分公式。

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

D.1 计算金属环的电容,考虑环具有有限的宽度 $2a$,请记住 $a \ll R$ 。(2分)

当电子到达“活跃区域”,金属环与一个电压为 V_0 的电源相连(如图3)。当电子离开“活跃区域”,金属环接地。接触点的电阻为 R_0 ,金属环本身的电阻可以被忽略。

D.2 确定金属环上的电荷量作为时间的函数, $q(t)$,画出这个函数的示意图, $t=0$ 是电子到达环面的时刻。金属环上电荷的绝对值的最大值 q_0 是多

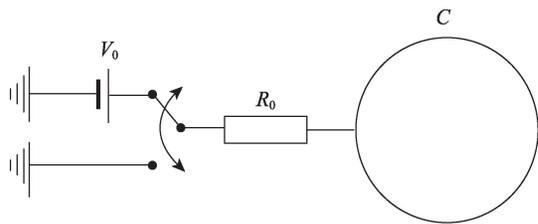


图3 静电透镜的充电过程

少?金属环的电容为 C (也就是说计算时不必使用在D.1中电容的实际表达式)。(1分)

提示:图3中电源的极性仅供参考,实际的极性应当使得透镜能够汇聚电子。

E. 更加真实的透镜的焦距:非瞬时充电(2分)

在这个部分,我们将会考虑更加真实的透镜的行为。这里我们将会再次忽略金属环的宽度 $2a$ 以及假设电子在到达“活跃区域”之前是和 z 轴平行的。但是金属环的充电过程不再是瞬时的。

E.1 确定透镜的焦距 f 。假设 $f v \gg R_0 C$,但是 d/v 和 $R_0 C$ 是一个数量级的。用B.1中的常数 β 和其他已知量表示你的结果。(1.7分)

E.2 在上一问中求出的 f 和在C部分中求出的焦距非常类似,仅仅是表达式中的电荷 q 被替换为了 q_{eff} 。确定 q_{eff} 的表达式。(0.3分)

赛题背景

静电透镜,顾名思义,是利用静电来实现类似于透镜聚焦功能的装置,类似于光线通过光学透镜实现聚焦一样。静电透镜通过带电导体所产生的静电场来使电子束聚焦和成像,被广泛应用于电子器件(如阴极射线示波管)和电子显微镜中,将样品发射的电子聚焦并引导至电子分析仪。静电透镜系统可以按照与光学透镜相同的方式设计,因此静电透镜很容易放大或会聚电子。静电透镜也可用于聚焦离子束,例如制作用于照射单个细胞的微束。

本题就是基于静电透镜而出的一道题目,所给出的模型逐层递进,涉及电磁学和光学相关知识,还需要进行一些数学运算。

本题的模型依然是十分理想化的,实际情况下电子的运动将会复杂得多,读者还可进一步地考虑电子 z 方向速度的变化以及在活跃区域内 r 坐标的变化,以及考虑电子的相对论效应,讨论静电透镜的焦散等等。

* * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答发送至aosai@ihep.ac.cn邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。