

# 1986年赴美物理研究生试题

## A 经典物理

A1. 把一个半径为  $R$ , 相对磁导率为  $\mu$  的圆球, 置于与时间无关的、沿  $z$ -方向的磁通量密度为  $B_0$  的均匀磁场中以下各题中电介常数均为 1 a) 试计算空间中各点的场  $B$  (用磁标量势  $\phi_m$  做) b) 试对  $r > R, B$  场的性质作一简单描述

A2. 一个质量为  $m$  的粒子, 位于地球引力场的影响下, 在一光滑表面上以恒定的角速度  $\omega (\omega > 0)$  沿  $z$  轴旋转.  $x$  和  $y$  轴是水平的, 接触表面的最低点作为原点. 坐标选取使  $x, y$  和  $z$  形成一右手系统, 其中  $z$  轴是由  $\omega = \omega \hat{U}_z$  确定的. ( $\hat{U}_z$  是  $z$ -方向上的单位矢量). 表面是由下式  $z = (x^2/2a + y^2/2b)$  表示, 其中  $a > b > 0$ .

a) 在靠近原点作小振动的情况下, 求拉格朗日量, 并证明运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega \frac{dx}{dt} + \left(\frac{g}{b} - \omega^2\right)y = 0.$$

b) 考虑形式为  $x = A \exp(pt)$  和  $y = B \exp(pt)$  的解. 如果  $\omega^2$  在  $(g/a)$  与  $(g/b)$  之间, 证明运动是不稳定的 (有变为无穷大的非振荡解). 试问不稳定条件是否和  $\omega^2 = 0$  情形相一致吗?

注意: 实际上已给出运动方程, 不论你能否导出这些方程, 你可以解出(b).

A3. 我们企望得到有关山脉性质的知识例如, 喜马拉雅山, 所用的方法是测量与铅垂线偏离的角度  $\theta$  的实验再与理论相比较. (铅垂线是由一根弦线挂一个球组成的, 如果地球是对称的, 自然弦线是垂直的)

a) 作为第一个山脉模型. 选取一个半径为  $a$  密度为  $\rho_m$  的无穷大半圆柱体坐落在密度为  $\rho'_m$  的无穷大地球平面上 (如图1). 求距柱体轴  $r_0$  远处的铅垂线的偏离角  $\theta$ , 其中  $r_0 > a$ .

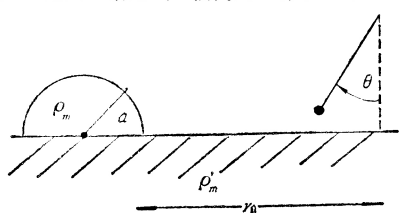


图 1

此图未按比例画, 几米长的弦线恰在地球平面之上,  $\theta$  角是很小的.

b) 由以上模型预估的  $\theta$  角度仍嫌太大, 现考虑第二个模型, 半径为  $a$  的一整个圆柱体, 其轴线在无穷大地球平面上 (如图2). 求对任意  $\rho_m$  和  $\rho'_m$  情形下的  $\theta$  角度. 特别是  $\rho'_m = 2\rho_m$  情形  $\theta$  的角度, 这时山脉飘浮着. 铅垂线离柱体轴距离为  $r_0$ , 而  $r_0 > a$ .

A4. 一直线加速器可将质子加速到能量为  $10^9$  电子伏/千米. 质

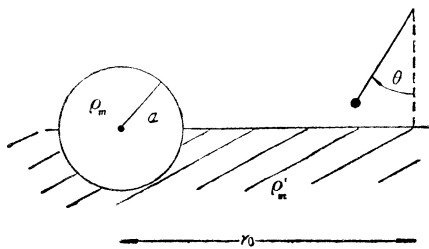


图 2

子撞击由质子所组成的靶, 靶可认为是静止的. a) 要使质子-反质子对的产生过程  $P + P \rightarrow P + P + P + \bar{P}$  成为可能, 试问加速器需要多长? 最初靶质子是静止的. b) 在小速度情形下, 在自由空间中带有电荷  $e$ , 受到加速度  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , 其辐射功率近似表示为

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}.$$

由于  $dE$  和  $dt$  都是 4-矢量的第四分量,  $P = dE/dt$  可作为标量变换. 求由此得到任何速度下都成立的  $dE/dt$  表示. (可引入一个 4-矢量作为中间步骤, 最后的结果应按通常的三维速度和加速度矢量表示)

A5. 一波数  $k = k\hat{k}$  的平面波, 射向一对平行玻璃间距为  $d$  的一法布里-珀罗干涉仪. 每片玻璃的反射系数为  $r$  ( $r$  可取为实数, 它是反射振幅与人射振幅之比). a) 对于  $k$  固定  $\hat{k}$  改变情形下, 试计算极大与极小穿透强度之比  $Q$ .  $Q$  与入射波振幅、两条相继光线路程差  $\Delta$  无关 (见图 3 中的光线(1)和(2))

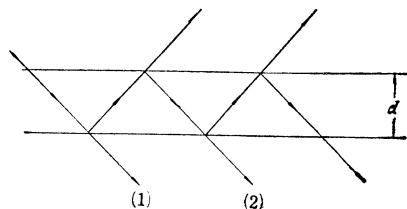


图 3

b) 试计算光程差  $\Delta$ .

A6. 有一个完全由一定域分布的永久磁化强度  $M(x)$  所引起的静磁场. a) 适合麦克斯韦方程组求出其形式; 进一步求出场和  $M$  间的附加联接条件必须使问题可解的基本关系. b) 试用磁标量势  $\phi_M(x)$  和  $M(x)$  表示  $B(x)$  和  $H(x)$ , 并求出只含  $\phi_M$  和  $M$  的方程. c) 试证明  $\int B(x) \cdot H(x) d^3x = 0$  式中积分是对整个空间进行的.

## B 近代物理

B1. 利用任何一种形式的测不准原理, 试估计以下各小题的数值. 不必考虑数量级为 1 的各因子 (无需精确求解). a) 假设哈密顿量是  $H = (P^2/2m) - (Ze^2/r)$ , 求类氢离子的基态能. b) 假设  $H = (P^2c^2 + \mu^2)^{1/2} - (Ze^2/r)$ , 求类氢离子的基态能, 式中  $\mu = mc^2$ , 试问你的结果对于所有的  $Z$  都成立吗? 此结果与 a) 的结果之间的联系是什么? c) 质量为  $m$ , 动量为  $P$  的粒子垂直入射到具有排斥势为  $V_0$  (而  $V_0 \gg (P^2/2m)$ ) 的表面, 求其穿透深度  $D$ . d) 求一对重粒子与交换质量为  $m$  的一轻介子相互作用的力程, 注意介子的最大速率是  $c$ . e) 一声波是由频率差  $\Delta\nu$  的两个近单色波叠加的. 求确立这个波确实包括这两频率所需最小的时间是多少?

B2. 设以下各题温度是绝对零度 (Kelvin) a) 在统计量子理论中, 求动量空间  $d^3P$  体积内每立方厘米中有多少自旋 1/2 无相互作用的某种类型的费米子? (不需证明, 取温度为零). b) 对于某种已知无相互作用费米子, 如果数密度为  $n$ , 求费米动量  $P_F$ . c) 在计算能量密度时, 试粗略地估计要多大的数密度  $n$ , 才能忽略静止质量? d) 作为一个粗糙的中子星模型, 假设只涉及到电子、质子和中子. 进而假设中微子质量为零, 而产生的中微子都将对感兴趣的区域逃逸出去. 考虑在一空间区域内, 电子、质子和中子的数密度都为  $n_e, n_p$  和  $n_n$  都是均匀的, 而且数值很大以致于静止质量都可忽略. 最后假设所有的相互作用均可忽略, 粒子系统是呈电中性的, 单

位体积内的粒子数是固定不变的  $n_T$ .

求比例  $n_p:n_n$  是多少,使总能量密度最低.

B3. a) 沿  $z$ -轴极化自旋为  $1/2$  的粒子,在轴上的自旋投影为  $+1/2$ . 然后,测量它沿  $z'$ -轴的自旋投影, $z'$ -轴与  $z$ -轴构成夹角  $\theta$ . 求自旋投影为  $+1/2$  的几率  $P(+1/2)$  是多少? 求自旋投影为  $-1/2$  的几率  $P(-1/2)$  是多少? 第一次测量把一束粒子分成两束,第二次测量出的是两束粒子的自旋在原来  $z$ -轴上的投影,试问投影是  $+1/2$  的几率是多少?

b) 一个负的  $\mu$  介子(自旋  $1/2$  粒子用  $\mu^-$  表示),沿正的  $z$ -轴方向极化,被一中心势的力心俘获到轨道角动量量子数为  $l$  的态上,而  $l \gg 1$ ,以至于轨道角动量  $l$  可以作为经典量处理.  $l$  和自旋是耦合的. 如果  $l$  对  $z$ -轴构成  $\theta$  角,求  $j = l + (1/2)$  的几率是多少? 求测量自旋沿  $z$ -轴的投影为  $+1/2$  的几率是多少? 如果  $l$  对  $z$ -轴的取向是随机的,求几率是多少? c) 如果在自由空间中一静止  $\mu$  介子衰变成若干粒子,每个粒子的质量与  $\mu$  介子质量  $m_\mu$  相比是可忽略的,问任何一种粒子的最大动能是多少? d) 粗略地给出  $m_\mu$  和电子质量的比率,求  $\mu$  介子的半衰期是多长?

B4. 氢原子中的两电子,都处在  $P$  态,其主量子数是  $n_1$  和  $n_2$ . a) 设  $n_1 \neq n_2$ , 求一个  $P$  电子有多少子态? 当  $n_1 = n_2$  时,求两个  $P$  电子有多少个子态? 用总角动量量子数  $S, L, J$  来标记态,试问哪些态是可能的? 与所有的  $S, L$  和  $J$  态相联系的子态总数是多少? b) 如果  $n_1 = n_2$ , 可能的  $S, L$  和  $J$  的态是不同的,为什么不同? 须简要说明,不必确定  $n_1 = n_2$  时的  $S, L$  和  $J$  的态,但要说出为什么  $^3D$  态是不可能的简单道理. c) 已知原子的精细结构效应在所讨论的问题中是足够大的以致于态可以区分开. 但是对已知  $n$  和  $l$  的状态径向波函数的效应却很小以致于可忽略. 考虑满壳层外有一个电子的碱原子. 假设不同  $l$  态间的跃迁是电偶极跃迁(忽略相同  $l$  态间的跃迁). 问选择定则是什么?

试问在图 4 中,哪些能级间的跃迁是可能的? 这些谱线间的相对强度是多大?

B5. 令  $(N, Z)$  表示一处在基态上的原子核,式中  $N$  是中子数,  $Z$  是质子数,并令  $M(N, Z)$  是原子核的质量. 即使  $\Delta M = M(N, Z) - M(N-1, Z+1)$  是小于电子的质量  $m_e$  (假设反中微子的质量是零),  $\beta$  衰变过程  $(N, Z) \rightarrow (N-1, Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e$  或许是可能的.

a) 如果我们把原子核连同它的所有电子一并来处理,即做为中性原子处理,并且如果由于一个电子发射到连续态所形成的离子与初始原子的基态结合能高的能量差  $\Delta E_{\text{基态}}(Z)$  是足够大的话,这一过程在能量上也是可能的. 为了粗略估计  $\Delta E_{\text{基态}}(Z)$ , 可以用下面的方式,估计一个具有核电荷  $Z$  的中性原子的基态能  $E_{\text{基态}}(Z)$ . (i) 忽略电子-电子相互作用 (ii) 利用非相对论理论 (iii) 假设  $Z \gg 1$ , 如果电子处在最外非闭合壳层,所作的贡献是可忽略的. 利用玻尔能量,求出最大主量子数  $n_{\text{最大}}(Z)$ , 因此,得到一个关于  $E_{\text{基态}}(Z)$  很简单的表式. 在你计算  $E_{\text{基态}}(Z)$ , 和计算  $\Delta E_{\text{基态}}(Z)$  中, 仅需得到  $Z$  幂次的主导项. 忽略离子处在末态的基态能与一个具有核电荷为  $Z+1$  的中性原子的基态能间的能量差, 求  $\Delta E_{\text{基态}}(Z)$ . 写出在什么条件下甚至在  $\Delta M < m_e$  时,过程 (1) 也是可能的. (忽略原子核的反弹).

b) 如果是裸原子核,并且电子也没有逃逸到连续态上,而是被俘获到主量子数  $n$  的束缚态上,那么即使  $\Delta M < m_e$ , 这一衰变在能量上也是可能的. 问  $n$  是什么值? c) 在允许的  $\beta$ -衰变过程中,由  $e^-$  和  $\bar{\nu}_e$  所带走的最大总角动量是多少? 用几句话讨论一下. (假设初末态原子核的能量差使发射的电子具有非相对论能量,说明自旋和轨道角动量) d) 禁戒核过程(例如,  $\beta^-$  衰变,或发射  $\gamma$  射线)在实验室里观察是相对简单的,但是禁戒的原子跃迁过程(发射一光子)在实验室里观察却是十分困难的. 简要地定性讨论这

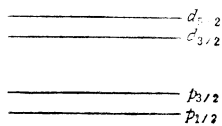


图 4

种不同的原因.

### C 普通物理

C1. 反应  $A+B \rightarrow C+D$  的截面为  $\sigma(v)$ , 式中  $v$  是  $A$  和  $B$  的相对速度而  $v = |v|$ . a) 每立方厘米密度为  $n_A$  个  $A$  型粒子束以速度  $v$  入射到处于静止状态的  $N_B$  个  $B$  型粒子. 无需证明, 给出每秒发生  $A+B \rightarrow C+D$  反应的次数. b) 无需证明, 给出处在温度  $T$  质量为  $m$  的点粒子, 带有归一化常数  $c$  的麦克斯韦玻尔兹曼分布  $f(u) \cdot du$ . 求  $c$ . c) 有每立方厘米  $n_A$  个  $A$  型粒子处在温度  $T$  的热平衡下, 又有每立方厘米  $n_B$  个  $B$  型粒子处于静止状态. 不需证明, 给出每秒每立方厘米内发生反应  $A+B \rightarrow C+D$  次数的表达式. d) 如果质量  $m_A$  的  $A$  型粒子和质量  $m_B$  的  $B$  型粒子处于温度  $T$  的热平衡中, 则每秒每立方厘米发生的反应次数取决于  $A$  型粒子对  $B$  型粒子的归一化相对速度分布  $\phi(v)dv$ . 导出  $\phi(v)dv$ . (用笛卡尔坐标, 可能较简单).

C2. 考虑一群粒子集合, 其中由一观察者对第  $i$  个粒子描述有实数电荷  $q_i$  和实数磁荷  $g_i$ , 这里我们考虑能由同一个观察者给出另一种等价的描述的可能性. a) 开始, 考虑处于静止的一对粒子, 每个用  $q_1$  和  $g_1$  表征. 求具有  $g_1 = 0$  (用第二种描述) 并给出这两粒子间相同的力的  $q_1$  的值. b) 现在考虑两组粒子集合, 一组用  $q_1$  和  $g_1$  另一组用  $q_2$  和  $g_2$  来表征. 试问刚才给出的电荷、磁荷必须满足什么条件, 如果另一种描述是可能的, 在这种描述中第一组有  $q_1$  和  $g_1 = 0$ , 第二组有  $q_2$  和  $g_2 = 0$ , 如果处于静止的一对全同粒子之间的力和处于静止的一对非全同粒子之间的力是和最初描述的力相同, 问刚才给出的电荷、磁荷必须满足什么条件? c) 一集中每个粒子由电荷  $q$  和  $g = 0$  表征, 在  $x$  轴上, 从  $-\infty$  到  $+\infty$  范围, 每单位长度上有  $n$  个粒子, 某特定时间  $t_0$ , 用  $P$  表示在离  $z$ -轴  $r$  处  $x$  轴上一个以  $v$  速度平行  $Z$  运动的全同粒子.  $r$  是如此之大, 同  $z$ -轴上粒子间距相比, 我们可用一个恒定线密度  $d$  近似表示一组粒子的电荷密度. 求在  $t_0$  时由此组粒子施加在  $P$  上的力  $F$ . d) 在  $z$ -轴上的粒子也能用适当选取  $q'$  和  $g'$  值所表征 (不是唯一的), 现在  $P$  也由  $q'$  和  $g'$  来表征. 作用在  $P$  上的力必须要和刚才得到的相同. 由于它的电荷  $q'$ , 在存在  $E'$  和  $B'$  场的情形下, 作用到  $P$  上的力必须是洛伦兹力, 而由于它的磁荷  $g'$ , 在存在  $B'$  场情形下, 作用到  $P$  上的力必须是  $g'B'$ . 问作用在  $E'$  场中以速度  $v$  运动的磁荷  $g'$  的磁单极子上的力是什么?

C3.  $\psi(\mathbf{x}, t)$  满足非齐次波方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\mathbf{x}, t) = -4\pi f(\mathbf{x}, t),$$

引进自由空间格林函数  $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ , 它为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

的推迟解.

a) 如果  $f(\mathbf{x}, t)$  是  $\psi(\mathbf{x}, t)$  的唯一源, 给出用  $G$  和  $f$  表示的解  $\psi(\mathbf{x}, t)$ . b) 叙述限定  $G$  的可允许形式的三种不变性并给出由这些不变性所允许的最普遍形式. c)  $G$  的显纲是什么? d) 求对于  $c = \infty$  的格林函数  $G_{\infty}$ . e) 令  $f(\mathbf{x}, t) = \delta(t - t_0) F(\mathbf{x})$ , 其中对于所有原点为中心半径为  $R$  的球外的点  $F(\mathbf{x})$  均为零. 画出  $c = \infty$  和  $c$  为有限的  $r = |\mathbf{x}| > R$  的点  $\mathbf{x}$  处的  $\psi(\mathbf{x}, t)$  作为  $t$  的函数的草图, 并在  $t$  轴上标出适当时间. f)  $\psi(\mathbf{x}, t)$  由所有点  $\mathbf{x}'$  处的源  $f$  值所确定, 对于  $c = \infty$ , 对所有点  $\mathbf{x}'$  有意义的时间  $t'$  是  $t' = t$ ; 对于  $c$  为有限时, 对点  $\mathbf{x}'$  有意义的时间  $t'$  不再是  $t$ , 而是比  $t$  超前相当于光从  $\mathbf{x}'$  传播到  $\mathbf{x}$  所需的一段时间的  $t'$ . 一旦知道  $G_{\infty}$  就可猜出  $G$  可能是什么. 请按此做下去.

C4. 假设有理由地认为太阳和地球都可按黑体描述, 太阳和地球都有本身的恒定表面温度, 太阳产生它本身的能量也是地球辐射的能量. 用地球表面温度  $T_E$ 、有关太阳半径  $R_S$  和地球半径  $R_E$ 、太阳和地球间的距离  $D$  表示太阳表面温度  $T_S$ . 基于以上模型, 用

你所知道的各种不同的温度和距离的最好值作一粗略的  $T_s$  数值的估计。

C5. a) 两个具有自感  $L_1$  和  $L_2$  的回路(其中电阻  $R_1$  和  $R_2$ , 电容  $C_1$  和  $C_2$ ) 通过互感系数  $M$  耦合起来. 只许用能量关系考虑, 证明  $M^2 \leq L_1 L_2$ , b) 如果你只记得  $L_1, L_2$  和  $M^2$  是不等式, 但记不清是  $M^2 \geq L_1 L_2$  或  $M^2 \leq L_1 L_2$ , 用什么样的物理论证能使你做出正确的选择?

.....

如图 5 所示的两回路, 通过互感系数  $M$  耦合起来, 当时间  $t = 0$ , 接通开关  $c$  给出  $t < 0, t > 0$  时电流  $I_1(t)$  和  $I_2(t)$  所满足的方程. d) 已知  $I_1(0) = I_2(0) = 0$ , 求  $t = \infty$  时的电流. e) 我们有  $I_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ , 对于  $I_2(\omega)$  的解呈  $I_2(\omega) = MV_0\omega/D$  形式

式中  $D = D(\omega, L_1, L_2, M, R_1, R_2)$  是  $\omega$  的二次函数, 通过因果关系(即要求效果不能先于它的起因)可以得到相同的结果  $M^2 \leq L_1 L_2$ . 试问加在  $D$  上的因果关系要求什么条件?(简要, 数学上精确, 你无需有  $D$  的显式来说明加在  $D$  上的具体要求, 已知它是一个二次函数). 假设对于  $t < 0, I_1(t) = I_2(t) = 0$ .

C6. a) 何时玻尔引进角动量量子化概念的? 前后不要超过 15 年. b) 一个  $\alpha$  粒子的总结合能是多少电子伏? 相差不超过因子 2. c) 例如, 已知某些千电子伏或更高的能量的  $\alpha$  粒子射到物质中, 它们有相当确定的射程, 即粗略地说它们穿过相同的距离, 另一方面, 已知能量的  $\gamma$  射线射程却是十分参差不齐的, 不用任何方程, 对上述事实作一

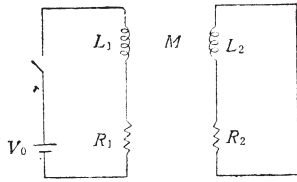


图 5

简单扼要的说明. d) 用一简单的物理论证, 证明在自由空间中的光子, 无论它的能量  $h\nu$  多大都不能产生任何的非零质

量的粒子. 无需建立任何复杂的方程, 清楚说出你的假定, 解释上述事实. e) 间距为  $Z$  的两无穷大平行板, 每板都是理想导体. 经典地看, 这两板间无相互作用, 但是如果考虑有(相对论的)电磁场的量子真空涨落, 两板就有相互作用. 要确定两板间单位面积上力  $f$ , 用到哪些物理常数和物理量. 用量纲分析确定  $f$ , 可以允许有一个待定的数值常数. (提示: 仅有三个相关的物理常数和物理量). f) 瑞利-里兹法是利用一适当的试探波函数  $\psi_t$  提供一种由已知能级的能量  $E$  的估计值  $E_t$ . 这种方法的优点为  $E_t - E$  的误差是  $\psi_t - \psi$  误差平方的量级, 当应用到氢原子  $1s$  能级时, 如果采用薛定格方程  $E_t$  可提供  $E$  的上限. 但是, 用于狄拉克方程却不是这种情形了, 不用方程用几句话说明原因, 解释这两个方程给出的结果本质上的差别.

C7. a) 一线偏振电磁波垂直入射到起偏器上, 波的偏振面相对于起偏器的偏振轴夹角为  $\theta$ . 令  $P(\theta)$  为波的穿透几率, 不需证明, 问  $P(0), P(\frac{1}{2}\pi)$  和  $P(\pi)$  是多少? 如何装置很大数目  $N$  的起偏器才能得到  $P(N)$  接近 1 的几率, 而偏振矢量转过  $(\pi/2)$  角度? 对于  $N \gg 1$ , 得出以上装置的简单近似式. b) 有质量从  $m_1$  到  $m_N$  的  $N$  个粒子, 静放在一无穷大无摩擦的平面上. 它们排成直线, 相应的位置为从  $x_1$  到  $x_N$ . 在此直线某处另外一个质量为  $m$  的  $P$  粒子沿直线方向有一已知初速  $v_i$ . 在所有的粒子停止碰撞后,  $P$  经历  $n$  次碰撞并有末速  $v_f$ . 如果它的初速是  $3v_i$ ,  $P$  经历多少次碰撞, 它的末速多大? 请说明理由. c) 一个绕地球轨道旋转的卫星具有能量  $-|E|$ . 它的动能是多少? 势能是多少? 某时刻后, 卫星损失了一定的能量  $\Delta E (> 0)$ , 而  $\Delta E \ll |E|$ . 它的动能是增加还是减少了? 这时它的动能是多少? (不需证明, 但需简单扼要地说出理由). d) 一热天体向空间辐射了相当的能量  $\Delta E$ . 如果有关的吸力是万有引力, 并且阻止塌缩的力来自热运动产生的压力. 问它的热能改变的符号和量的大小? 如果该天体是一中子星, 你能对它辐射出能量  $\Delta E$  后, 它的热能改变作怎样的评述?

许勋光