美国弗吉尼亚理工学院州立大学物理系1979年在我国招考研究生4小时考试试题参考答案(续)

(试题见本刊 80 年第 2 期)

3) 答: 设 m 所在点至地球中心 O 的距离为 r. 矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 $\hat{x}$ 夹角为 θ,则 m 所受的地球引力为:

$$f = [Gm(4\pi/3)r^3\rho]/r^2 \tag{1}$$

这里:

$$\rho = M_0/(4\pi R^3/3) \tag{2}$$

为地球的质量密度. 将 (2) 代入 (1) 有

$$f = GmM_0 r/R^3 \tag{3}$$

A) 在 A 点物体所受地球引力为 f_A, 则隧道地板所受之垂直压力为

$$f_\perp = f_A \sin\vartheta_A \tag{4}$$

物体所受的水平方向的力(沿 $-\hat{x}$ 方向)为

$$f_\parallel = f_A \cos\vartheta_A \tag{5}$$

物体在 A 点开始运动的条件为

$$f_\parallel = \mu_{\max} f_\perp \tag{6}$$

故

$$\mu_{\max} = \operatorname{ctg}\vartheta_A = \sqrt{R^2 - L^2}/L \tag{7}$$

B) 物体从 A 到 B 点引力作的功为零. 初始动能全部消耗在摩擦变热上.

摩擦力所做的功

$$W_{摩擦} = \int_{x_A}^{x_B} \mu f \sin\vartheta dx$$

$$= \int_{-\sqrt{R^2-L^2}}^{\sqrt{R^2-L^2}} \mu \frac{GmM_0}{R^3} r \cdot \frac{L}{r} dx$$

$$= \mu GmM_0 2L\sqrt{R^2 - L^2}/R^3 \tag{8}$$

$$\frac{1}{2} mV_0^2 = \mu_{\max} GmM_0 2L\sqrt{R^2 - L^2}/R^3$$

故 μ 的最大值

$$\mu_{\max} = V_0^2 R^3/(4GM_0 L\sqrt{R^2 - L^2})$$

C) 如果有摩擦则物体从 A 静止出发不可能到达 B 点

如果无摩擦,物体受引力的水平分量

$$f_\parallel = -GmM\,x/R^3 \tag{9}$$

物体的运动方程为简谐振动方程式

$$m\ddot{x} + GmM_0 x/R^3 = 0 \tag{10}$$

或改写成

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{11}$$

其中

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{GM_0/R^3} \tag{12}$$

物体从 A 到 B 的时间

$$t_{AB} = T/2 = \pi\sqrt{R^3/GM_0} \tag{13}$$

D) 答案与 C) 相同.

E) 小球球面上 A 点的切线速度

$$v_t = r'\dot{\varphi} \tag{14}$$

其中 φ 为小球自转的角度. 小球质心平移的速度

$$v_c = -\dot{x} \tag{15}$$

小球在 A 点纯滚动的条件为

$$v_t = v_c \quad 即 \quad r'\dot{\varphi} = -\dot{x} \tag{16}$$

故有

$$r'\ddot{\varphi} = -\ddot{x} \tag{17}$$

小球在 A 点滚动是由于摩擦力矩所引起. 小球转动惯量为 $(2/5)mr'^2$. 故小球转动的方程为

$$F_{摩} \cdot r' = \frac{2}{5} mr'^2\ddot{\varphi} \tag{18}$$

小球质心平移运动的方程为

$$m\ddot{x} = F_{摩} + f_\parallel = GM_0(\mu L - \sqrt{R^2 - L^2})/R^3 \tag{19}$$

由(17)—(19)得到使小球在 A 点纯滚动的摩擦系数的值为

$$\mu_{PR} = 2\sqrt{R^2 - L^2}/7L$$

(杜东生)

4) 答: A) 设管内静电势为 $u(r,\theta)$,它满足方程及边界条件:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0, \\ u|_{r=R_1} = 0, \qquad u|_{r=R_2} = 0, \\ u|_{\theta=0} = 0, \qquad u|_{\theta=\pi/4} = V. \end{cases}$$

这里的微分方程是齐次的, 边界条件中关于变数 r 的一对是齐次的, 关于变数 θ 的一对边界条件则是非齐次的. 如果直接分离变数, 即令

$$u(r,\theta) = W(r)\Theta(\theta),$$

则 $W(r)$ 必须满足

$$\begin{cases} r\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{dW}{dr}\right] + \lambda W = 0, \\ W(R_1) = 0, \qquad W(R_2) = 0. \end{cases}$$

这时可以求得本征值与本征函数,

$$\lambda_n = [n\pi/(\ln R_2 - \ln R_1)]^2$$

$$W_n(r) = \sin[(\ln r - \ln R_1)/(\ln R_2 - \ln R_1)]n\pi,$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots.$$

相应地, 有

$$\Theta_n'' - \lambda_n\Theta_n = 0,$$

$$\Theta_n = A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\theta + B_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\theta.$$

因此, 一般解为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\theta) W_n(r)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{\ln R_2 - \ln R_1}\theta + B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{\ln R_2 - \ln R_1}\theta\right) \times \sin\frac{\ln r - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1} n\pi$$

代入关于变数 θ 的边界条件，就可以得到

$$u|_{\theta=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{\ln r-\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}n\pi=0,$$

$$\therefore\qquad B_n=0,$$

$$u|_{\theta=\pi/4}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{sh}\frac{n\pi^2}{4(\ln R_2-\ln R_1)}\cdot\sin\frac{\ln r-\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}n\pi=V,$$

$$\therefore\qquad A_n=\frac{1}{\mathrm{sh}\dfrac{n\pi^2}{4(\ln R_2-\ln R_1)}}\cdot\frac{\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}V\sin\frac{\ln r-\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}n\pi\cdot\frac{dr}{r}}{\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\sin^2\frac{\ln r-\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}n\pi\cdot\frac{dr}{r}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{sh}\dfrac{n\pi^2}{4(\ln R_2-\ln R_1)}}\cdot\frac{V\dfrac{\ln R_2-\ln R_1}{n\pi}[1-(-)^n]}{\dfrac{\ln R_2-\ln R_1}{2}}$$

$$=\frac{2V}{\pi}\frac{1-(-)^n}{n}\frac{1}{\mathrm{sh}\dfrac{n\pi^2}{4(\ln R_2-\ln R_1)}}.$$

这里，在利用正交性定系数 A_n 与 B_n 时，注意有正交权函数 $1/r$. 因此，波导管内静电势为

$$u(r,\theta)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\mathrm{sh}(2n+1)\pi\theta/(\ln R_2-\ln R_1)}{\mathrm{sh}(2n+1)\pi^2/4(\ln R_2-\ln R_1)}\cdot\sin\frac{\ln r-\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}(2n+1)\pi.$$

在上面这个方法中，本征函数 $W_n(r)$ 的形式略微复杂一些. 因此，更常用的方法是首先将关于 θ 的边界条件齐次化，即令

$$u(r,\theta)=P(r,\theta)+v(r,\theta).$$

适当选取齐次化函数 $P(r,\theta)$，使它满足与 $u(r,\theta)$ 相同的边界条件，

$$P|_{\theta=0}=0,\qquad P|_{\theta=\pi/4}=V,$$

而 $v(r,\theta)$ 就一定满足

$$v|_{\theta=0}=0,\qquad v|_{\theta=\pi/4}=0.$$

这样我们即可利用这一对齐次边界条件确定本征值与本征函数. 由于对齐次化函数 $P(r,\theta)$ 的要求只是满足一定的边界条件，因此，$P(r,\theta)$ 的选取不是唯一的. 而且，一般说来，这时 $v(r,\theta)$ 满足的微分方程会是非齐次的. 我们就不能简单地将 $v(r,\theta)$ 分离变数，而是要将 $v(r,\theta)$ 按相应齐次问题的本征函数展开.

例如，我们可以取

$$P(r,\theta)=V\sin 2\theta,$$

因此，$v(r,\theta)$ 由定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}=\dfrac{4}{r^2}V\sin 2\theta,\\ v|_{r=R_1}=-V\sin 2\theta,\quad v|_{r=R_2}=-V\sin 2\theta,\\ v|_{\theta=0}=0,\qquad v|_{\theta=\pi/4}=0\end{cases}$$

相应齐次问题的本征函数为 $\sin 4n\theta$, $n=1,2,3,\cdots$. 故可令

$$v(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(r)\sin 4n\theta,$$

同时，将 $\sin 2\theta$ 也按此组本征函数展开，

$$\sin 2\theta=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\sin 4n\theta,$$

代入上面的定解问题，即可得到关于 $W_n(r)$ 的常微分方程及定解条件：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dW_n}{dr}\right)-\dfrac{16n^2}{r^2}W_n\\ \qquad=\dfrac{32V}{\pi}\dfrac{(-)^{n+1}}{r^2}\dfrac{n}{4n^2-1},\\ W_n(R_1)=W_n(R_2)=(-)^n 8Vn/\pi(4n^2-1)\end{cases}$$

由此就能求出

$$W_n(r)=\frac{2V}{\pi}\frac{(-)^n}{n}\left[\frac{1}{4n^2-1}+\frac{(r/R_2)^{4n}+(R_1/r)^{4n}}{(R_1/R_2)^{4n}}\right].$$

所以，

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=V\sin 2\theta+v(r,\theta)\\&=V\sin 2\theta+\sum_{n=1}^{\infty}W_n(r)\sin 4n\theta\\&=V\sin 2\theta+\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n}\left[\frac{1}{4n^2-1}+\frac{(r/R_2)^{4n}+(R_1/r)^{4n}}{1+(R_1/R_2)^{4n}}\right]\sin 4n\theta\\&=\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}}{n}\cdot\left[1-\frac{(r/R_2)^{4n}+(R_1/r)^{4n}}{1+(R_1/R_2)^{4n}}\right]\sin 4n\theta.\end{aligned}$$

在第二个解法中，关键是选取 $P(r,\theta)$. 齐次化函数 $P(r,\theta)$ 选取得不同，求解 $v(r,\theta)$ 时就会简繁不同.

还需要指出，不同方法求出的 $u(r,\theta)$ 形式可能不同，但是，解的存在唯一性保证了它们是恒等的.

B) 按题意，所考虑的为横磁型（TM）波，故 z 轴方向只有电场分量 E_z. 我们只要求出 E_z，即可得到该波的全部性质. 在定频情况下，可设

$$E_z=u(r,\theta,z)e^{-i\omega t}.$$

ω 代表圆频率，由于 E_z 为直角分量，故 u 满足赫姆霍兹方程：

$$\nabla^2 u + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u = 0.$$

由理想导体的性质，在管壁上电场切向分量为零，因而 u 满足下述边界条件：

$$u|_{r=R_1} = 0, \qquad u|_{r=R_2} = 0,$$
$$u|_{\theta=0} = 0, \qquad u|_{\theta=\pi/4} = 0,$$
$u|_{z\to\pm\infty}$ 有界.

令 $u(r, \theta, z) = W(r)\Theta(\theta)Z(z)$，代入分离变数，即得

$$\begin{cases} Z'' + k_z^2 Z = 0, \\ Z|_{z\to\pm\infty} \text{有界}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta'' + m^2\Theta = 0, \\ \Theta(0) = \Theta(\pi/4) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dW}{dr}\right] + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right. \\ \qquad \left. - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2}\right] W = 0 \\ W(R_1) = 0, \qquad W(R_2) = 0. \end{cases}$$

k_z^2 及 m^2 均为分离变数时引入的待定常数.

当我们考虑沿 z 方向行进的波时，$Z(z)$ 的解可取为 $Z(z) = e^{ik_z z}$，这里 k_z 的取值是连续的.

对于 Θ 的本征值问题，容易求出

$$\Theta_n(\theta) = \sin 4n\theta,$$
$$m = 4n, \ n = 1, 2, 3, \cdots\cdots.$$

对于 W 的本征值问题，常微分方程的通解为

$$W(r) = AJ_{4n}(k_r r) + BN_{4n}(k_r r),$$

其中

$$k_r^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2,$$

$J_{4n}(x)$ 和 $N_{4n}(x)$ 分别为 $4n$ 阶贝塞耳函数和诺埃曼函数. 由边界条件

$$W(R_1) = AJ_{4n}(k_r R_1) + BN_{4n}(k_r R_1) = 0,$$
$$W(R_2) = AJ_{4n}(k_r R_2) + BN_{4n}(k_r R_2) = 0,$$

有

$$\frac{A}{B} = -\frac{N_{4n}(k_r R_1)}{J_{4n}(k_r R_1)} = -\frac{N_{4n}(k_r R_2)}{J_{4n}(k_r R_2)}.$$

因此，不妨取

$$A = N_{4n}(k_r R_1), \qquad B = -J_{4n}(k_r R_1).$$
$$W(r) = N_{4n}(k_r R_1)J_{4n}(k_r r) - J_{4n}(k_r R_1)N_{4n}(k_r r).$$

同时，k_r 必须满足

$$J_{4n}(k_r R_1)N_{4n}(k_r R_2) - N_{4n}(k_r R_1)J_{4n}(k_r R_2) = 0.$$

这是关于 k_r 的一个超越方程. 可以证明，此方程的根有无穷多个，均为实数. 并且，若 $k_r = \mu$ 是超越方程的根，则 $k_r = -\mu$ 也是根，且 $\pm\mu$ 给出的 $W(r)$ 是线性相关的. 因此，我们只需考虑超越方程的正根. 我们可以把这些正根 $\mu_{n,i}$ 按大小排列起来，

$$0 < \mu_{n,1} < \mu_{n,2} < \cdots\cdots.$$

因此，相应的频率为

$$\omega_{k_z ni} = \sqrt{\mu_{n,i}{}^2 + k_z^2}\, c.$$

所以，ni 波型的截止频率为

$$\omega_{ni}^c = \mu_{n,i} c,$$

$\mu_{n,1}$ 中的最小值即为最低的截止频率.

（吴崇试）

5）答：由于假定粒子是可分辨的，故可用经典统计公式来处理. 先求配分函数 Z. 由公式

$$Z = \sum_i e^{-\beta\epsilon_i}$$

即得

$$Z = 1 + e^{-\beta\epsilon} = 1 + e^{-\epsilon/kT} \tag{1}$$

其中 T 由下式确定：

$$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{N\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} = \frac{N\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}} \tag{2}$$

A）熵 S 可通过 Z 求出：

$$S = kN\left(\ln Z - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z\right)$$
$$= kN\left[\ln(1 + e^{-\epsilon/kT}) + \frac{\beta\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}}\right], \tag{3}$$

B）从（2）式可解出 T 作为 E 的函数：

$$T = \frac{\epsilon}{k\ln\left(\frac{N\epsilon}{E} - 1\right)}. \tag{4}$$

由于 $\epsilon > 0$，故当 $\ln\left(\frac{N\epsilon}{E} - 1\right) < 0$ 时，T 值为负. 此条件即

$$\frac{N\epsilon}{E} - 1 < 1$$

或

$$E > N\epsilon/2.$$

换句话说，当能量为 ϵ 的粒子数目超过能量为零的粒子数目时，体系的温度值为负.

C）两体系进行热接触时，热量将从一体系流向另一体系. 要决定热量流动方向，一般来说，应从熵增加的角度来考虑. 但对本题所讨论的具体情况，通过以下的简单考虑即可定出.

从（4）式可知，温度值为正对应于

$$N\epsilon/E - 1 > 1$$

的情况，即

$$E < N\epsilon/2.$$

由此可见，负温度体系中粒子的平均能量实际上比正温度体系中粒子的平均能量还要大. 当一个负温度体系与一个正温度的同样体系进行热接触时，传热的方向将使两体系趋于热平衡. 既然考虑的是相同体系，达平衡时两体系中粒子的平均能量一定相等. 因此，传热的方向一定是从负温度体系传向正温度体系.

（曹昌祺）