



留声机转盘上滚动的球 ——第23届亚洲物理奥赛理论第二题

黄志强¹ 宋 峰²

(1. 江西科技学院附属中学 330029; 2. 南开大学物理科学学院 300071)

留声机是一种用来放送唱片录音的电动设备,是由美国发明家爱迪生1877年发明。

留声机的工作原理非常巧妙。它主要通过唱片上的凹槽来产生声音。当唱片在转盘上旋转时,唱片上的凹槽会让唱针上下振动。这些振动会通过一系列机械传动装置传递到留声机的扬声器,从而产生声音。留声机的基本结构包括留声箱、转盘、喇叭和唱片。本题以留声机的工作原理为背景。

本题要用到一些数学知识。这里给出一些符号以及矢量运算规则。

符号和约定: 矢量 $\vec{A}$ 的大小表示为 $A \equiv |\vec{A}|$, 其 x, y, z 分量分别用 A_x, A_y, A_z 表示。一个量的时间导数用量上的点表示: $\dot{\vec{A}} \equiv d\vec{A}/dt$, $\dot{A} \equiv dA/dt$ 。沿矢量 $\vec{A}$ 方向的单位矢量记为 $\hat{A}$ 。笛卡尔坐标的单位矢量是 $\hat{x}, \hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 。

矢量的运算法则:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{A}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \theta$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A}) = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta,$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A},$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

式中 θ 是矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的夹角。

矢量乘积在描述物理学中的许多关系方面非常有用。例如:

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = Q\vec{v} \times \vec{B}$ 。通常将三个矢量分量方程组合成一个方程可以节省时间。

假设一个转盘情景:

如图1所示,一个质量分布均匀的球,其质量为 m 、半径为 r , 在水平转盘上做无滑滚动。球的转动惯量为 I 。在问题B和C部分,转盘可以绕 z 轴自由旋转,转盘的转动惯量记为 I_d 。该题目的目的是分析球在实验室参考系下的运动和轨迹。假设转盘足够大,球运动过程中不会脱落。

我们使用了以下符号

Ω —表示转盘角速度的大小,

ω —球相对于其旋转轴的旋转角速度,

$\vec{R}$ —球中心相对于转盘旋转轴的水平位矢,

$\vec{v}$ —表示实验室参考系中球在 R 处的速度。

已知球的初始位置 $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(0)$, 初始速度 $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(0)$, 转盘的角速度 $\Omega_0 \equiv \Omega(0)$ 。对于初始矢量 $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(0)$ 和 $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(0)$, 假设它们的方向已知。此外, 当需要表达矢量时, 可以在表达式中使用单位矢量 $\hat{z}$ 。如果被要求用已知的物理量来求出某个表达式, 你可以使用 m, r, I 和 I_d 中的一个或多个物理量。为方便起见, 设 $\alpha = \frac{I}{I + mr^2}$, $\delta = \frac{I_d}{mr^2}$, 可以在计算中使用。

请将最终的答案写成矢量表达式, 包括叉积(矢量积)、点积(标量积)和轴方向上的单位矢量。

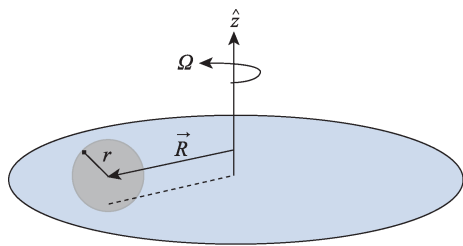


图1 球在转盘上无滑滚动

A 部分: 匀角速度转盘上的球[1.5 分]

首先,我们从最简单的情况开始,其中转盘角速度相对于垂直轴 $\hat{z}$ 是恒定的,即 $\Omega = \Omega_0$ 。

A.1 求出球的速度 $\vec{v}$,用 Ω 、 $\vec{\omega}$ 、 r 和 $\vec{R}$ 来表示。[0.1 分]

A.2 通过动力学方程和关于球中心的力矩方程,求出球的加速度 $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$,用 Ω 、 r 、 m 、 I 和 $\vec{v}_0$ 表示。[0.2 分]

A.3 当位矢为 $\vec{R}$ 时,求速度 $\vec{v}$,用 Ω 、 r 、 m 、 $\vec{v}_0$ 、 $\vec{R}$ 、 $\vec{R}_0$ 和 I 表示。[0.2 分]

A.4 已知初始速度 $\vec{v}_0$ 和初始位矢 $\vec{R}_0$,求出球的轨迹。[0.5 分]

A.5 假设球具有均匀的质量密度,其转动惯量为 $I = 2mr^2/5$ 。球的轨迹是一个圆,它的半径是 R_i ,并令 $R_i = R_0$ 。球需要多长时间接近桌子上的初始点($t=0$ 转盘上的位置)? 求球回到转盘上的初始点($t=0$ 时球在转盘上的位置)的时间 t ? [0.5 分]

解题提示:利用刚体的相关公式,在实验室参考系中进行计算。A.5 中,球完成一次圆周运动时,转盘转动整数圈。

B 部分: 自由旋转转盘上的球[4.0 分]

在这部分,转盘可以自由旋转,绕 z 轴没有任何摩擦。它的自由旋转只受到球的摩擦力的阻碍。

B.1 求出球的速度 $\vec{v}$ 和加速度 $\vec{a}$,用 Ω_0 、 $\vec{R}$ 、 $\vec{R}_0$ 、 $\dot{\Omega}$ 表示。[0.2 分]

B.2 求转盘的角加速度 $\dot{\Omega}$ 的大小,用 Ω 、 r 、 m 、 Ω_0 、 $\vec{R}$ 、 $\vec{R}_0$ 、 $\vec{v}_0$ 、 I 、 I_d 表示。提示:可以使用在本问题开始时定义的常量 α 和 δ 。[0.6 分]

B.3 转盘的角速度 Ω 是关于 R 的函数,求出该函数表达式,表达式中可使用这些常量: Ω_0 、 R_0 、 r 、 m 、 I 和 I_d 。[0.6 分]

B.4 对于给定的 Ω_0 、 R_0 ,从 B.3 的结果中,求 Ω 的最大可能值。[0.1 分]

B.5 求出整个系统的角动量的垂直分量 $M_z \hat{z}$ 。减去所有常数项,并将其余部分重新设为 $L \hat{z}$ 。在

B.1 部分中,已求得球的速度 $\vec{v}$, $\vec{v}$ 可以写成一个关于球的位置 $\vec{R}$ 的关系式和一个常矢量之和,我们设这个常矢量为 $\vec{c}$ 。设沿该矢量方向为 x 轴方向,沿 $\vec{z} \times \vec{c}$ 为 y 轴方向。在该参考系下求 Ω ,用 $\vec{R}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{z}$ 、 R^2 、 L 、 r 、 m 、 I 、 I_d 表示。再结合 B.3 的结果,写出一个只包含 R^2 和 y 变量以及 L 、 r 、 m 、 I 、 c 、 I_d 的方程,其中 c 是 $\vec{c}$ 的大小。令 $R^2 = x^2 + y^2$,求出仅包含 x 、 y 变量的球心运动的轨迹方程,进而列出所有可能的轨迹类型。[2.5 分]

解题提示:在 B.1 部分中,求得球的速度 $\vec{v}$, $\vec{v}$ 可以写成一个关于球的位置 $\vec{R}$ 的关系式和一个常矢量之和,我们设这个常矢量为 $\vec{c}$ 。由此可求得 B2 中的转盘角加速度 $\dot{\Omega}$ 的大小。B5 中,球受到阻力使球的速度和角速度都会发生变化。 $\vec{R}$ 可在直角坐标系中展开为 $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$ 。

C 部分: 磁场中转盘上的球 [4.5 分]

如果球以均匀的密度被填充到其半径的一半,而其余部分的质量可以忽略不计,其转动惯量 $I = \frac{mr^2}{10}$ 。球外表面均匀带电,总电量为 Q ,整个装置放置在一个在方向为 $\hat{z}$ 的均匀磁场 $\vec{B}$ 中,转盘以恒定的角速度 Ω 旋转,球的自转角速度为 $\vec{\omega}$ 。

C.1 写出球的动力学方程、磁力矩 $\vec{\tau}_s$ 的表达式,用 Q 、 r 、 $\vec{\omega}$ 、 $\vec{B}$ 表示。[0.5 分]

C.2 利用 C.1 的结果,求球在实验室参考系的线性加速度表达式,用 Q 、 r 、 $\vec{\omega}$ 、 $\vec{B}$ 表示。[0.5 分]

C.3 假设所有长度单位为 m ,角速度的单位为 s^{-1} ,时间量的单位为 s 。C.2 部分中线性加速度方程是 $\vec{R}$ 的二阶微分方程,其形式为: $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - \gamma \frac{d\vec{R}}{dt} \times \hat{z} +$

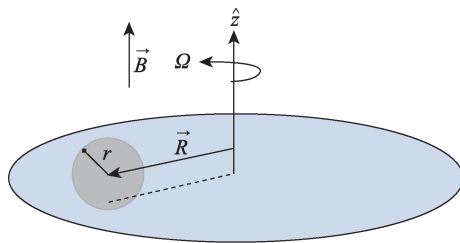


图2 恒定磁场中在转盘上的滚球

$$\beta \vec{R} = 0.$$

求出 γ 和 β 常数,用 Q, r, B, I, m, Ω 表示。

接着,对 $\vec{R}$ 的分量进行以下变换: $x(t) = \rho(t)\cos(\eta(t)), y(t) = \rho(t)\sin(\eta(t))$,使新的方程不含一阶导数项。其中极角 $\eta(t)$ 是时间的函数,试求 $\eta(t)$ 的表达式。

在新方程中,用 γ 和 β 表示 $\rho(t)$ 的系数 β' ,并求 $\rho(t)$ 不同变化规律的条件:谐振荡、指数衰减等。[1.0分]

C.4 对C3得到的方程,若初始条件 $x(0)=1\text{ m}$, $y=0\text{ m}$, $v_x(0)=\dot{x}|_{t=0}=1\text{ m/s}$, $v_y(0)=\dot{y}|_{t=0}=-1\text{ m/s}$,在这些条件下,当 $\beta'=0$ 时求出 γ 和 β 。进一步地得到对应的 Ω ,并绘制运动轨迹。球表面的是正电荷还是负电荷?在答题纸上用-表示负电荷,+表示正电荷。[0.9分]

C.5 如果你在C.4得到的答案是正确的,则 $\vec{R}(t)$ 随时间变化,若球的质量和半径为 $m=1\text{ kg}$ 和 $r=1\text{ m}$, $I=\frac{1}{11}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$,求旋转每圈能量变化和旋转 N 圈($N\gg 1$)的总能量变化。可以忽略远小于 N 的量。[1.6分]

解题提示:C2中,线性加速度方程是 $\vec{R}$ 的二阶微分方程,其形式为: $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \gamma \frac{d\vec{R}}{dt} \times \hat{z} + \beta\vec{R} = 0$

球的动能包含平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 和转动动能 $\frac{1}{2}I\omega^2$ 。

背景知识介绍:

1、磁力矩

闭合线圈中的电流在磁场中受到的安培力的作用,使线圈产生转动,即安培力产生了使线圈转动的力矩,这种由安培力产生的力矩称为磁力矩。

磁力矩 $\tau_s = IBL \cdot x$,磁力矩是一个矢量,可以写成 $\vec{\tau}_s = IS(\hat{e}_n \times \vec{B})$ 。

$IS\hat{e}_n$ 是描述一个任意形状的载流平面线圈本身性质的矢量,称为这个线圈的磁矩,用 $\vec{\mu}$ 表示:

$$\vec{\mu} = IS\hat{e}_n$$

线圈的磁力矩可写为: $\vec{\tau}_s = \vec{\mu} \times \vec{B}$

2、刚体运动规律

(1) 刚体纯滚动是指刚体在运动过程中,表面接触点处的相对速度始终为零的滚动运动。例如匀速转动的转盘上一个球做纯滚动时,球与转盘接触点的相对速度为零。故球心相对地面的速度等于球心相对接触点的速度与转盘接触点相对地面速度的矢量和。

(2) 当球做纯滚动时,存在静摩擦力。它是使球产生滚动的重要因素,方向与球的运动趋势方向相反。比如在水平面上向右滚动的球,摩擦力方向向左。根据牛顿第二定律,对于球的质心运动,在水平方向上若只考虑摩擦力 f , $f=ma_c$, a_c 为球心的加速度。根据转动定律,合力矩 $M = I\dot{\omega}$,对于做纯滚动的球,若以球心为转轴,摩擦力产生的力矩 $fr = I\dot{\omega}$ 。

* * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动,并在答案公布前将您的解答发送至aosai@ihep.ac.cn邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者,编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。

