美国各大学1982年在华招收物理研究生试题及答案

试题部分

经典物理（四小时）

（下列7试题解6题）

A1．一个质量m，半径R的实心均匀圆柱体放在相对水平方向成θ角的斜面上．令g表示通常的重力加速度，a是圆柱的轴线沿斜面的加速度．圆柱体与斜面间的摩擦系数是μ．对θ小于某个临界角θ_c时，圆柱体将无滑动地往下滚．问

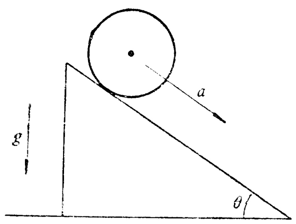

图 1

(i) 角度θ_c有多大?

(ii) 对于$\theta<\theta_c$情形，加速度a多大?

A2．一种质量密度ρ，粘滞性η的不可压缩的流体，以稳态层流被泵进内径R长度为L的圆管道内．进口处的压力是P_1，出口处压力是P_2，$P_1>P_2$．

令Q是单位时间通过管道的流体质量．计算Q．

A3．一个质量为m，磁偶极矩$\boldsymbol{M}$的质点，绕着偶极矩为$\boldsymbol{M}_0$的固定的磁偶极子作半径为R的圆周运动，其矩为M_0的磁偶极子置于圆周的中心．矢量$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{M}_0$彼此反平行，并与轨道平面垂直．

(i) 计算轨道偶极子的速度v．

(ii) 对微小的扰动是稳定的吗? 说明道理．（仅考虑在平面里运动）

A4．一块由电容器C和电感L联成的半无穷长的电网路．如图所示．

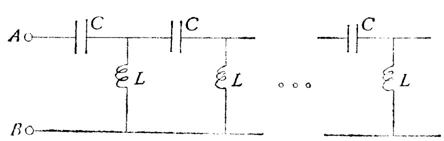

图 2

网路从左端的终端A，B开始；无止境地向右伸展．

在AB终端上加一交流电压$v_0\cos\omega t$引起一束电流流过终端．试计算因此馈送到电路中的一周的平均功率$\boldsymbol{P}$．

定性地回答两种情况下的差异：$\omega>\omega_0$，$\omega<\omega_0$，式中ω_0是C和L形成的某一临界频率．

A5．在无外磁场的情形下，某种材料在温度$T<T_0$时为超导的．在存在均匀场B且$T<T_0$时，这个系统能存在于两种热力学相：对于$B<B_c(T)$；它是处在超导相并且在这相中单位体积的磁化强度是

$$（超导相）\qquad M=-\frac{B}{4\pi};$$

对于$B>B_c(T)$；系统处在正常相，在此

$$（正常相）\qquad M=0.$$

这两相可以沿B-T平面内的$B=B_c(T)$曲线平衡下共处．

显然，横过共存曲线磁化强度有一不连续性．熵也有一不连续性，令$S_n(T)$和$S_s(T)$分别是沿着共存曲线的正常和超导相的单位体积的熵．给定

$$B_c(T)=B_0\left(1-\frac{T^2}{T_0^2}\right)$$

计算$\Delta S=S_n-S_s$，ΔS是温度T和其他参量的函数。

A6．在高L，横截面为A的圆柱筒内，盛以相互作用可忽略的经典点粒子气体，所有粒子的质量都为m并且都受到引力的作用（令g表示重力加速度常数）．已知系统处在温度为T的热平衡中．令C_v是（每个粒子的）定容比热，计算作为温度T，已知的其他参量和普适常数的函数C_v．还要特别注意$T\to0$，$T\to\infty$两种极限情况下的结果．

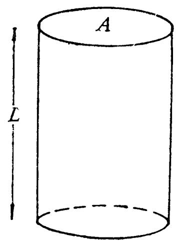

图 3

A7．处在压力P_0质量密度为ρ_0的平衡态的气体，被约束在长L截面为A的圆柱筒内．圆筒的右端是固定封闭的．左端有一个无摩擦和无质量的可动活塞．在平衡时．必须加到活塞上的外力，自然是$F_0=P_0A$．但是，假设由一外界作用引起一小的附加力：简谐力$f(t)=f_0\cos\omega t$．这样就产生的活塞的微小运动，因此它又在气体中引起小振幅扰动．令C是在气体中的声速；忽略粘滞性．令$V(t)$是活塞的速度．计算$V(t)$

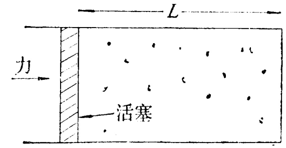

图 4

题解部分

经典物理(4小时)(7题解6题)

A1 解：令 f 是摩擦力．绕圆柱轴的转动惯量是 $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$．令 α 是绕这轴的角加速度

$$N - mg\cos\theta = 0;\quad mg\sin\theta - f = ma;$$
$$fR = I_0\alpha$$

如果无滑动，则 $a = R\alpha$，$f<\mu N$

由此得 (i) $\tan\theta < \tan\theta_c = 3\mu$

(ii) 当 $\theta<\theta_c$ 时，其加速度为 $a = \frac{2}{3}g\sin\theta$

A2．解：令 z, r, φ 为柱坐标变量．(z 轴沿管道方向)由问题的对称性，$\boldsymbol{v}$ (流体流速)指向 $\boldsymbol{z}$ 方向并且 $v_z \equiv v$ 只与 r 有关．由 Novier-Stokes 方程有

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = -\nabla\rho + \eta\nabla^2\boldsymbol{v}$$

左边为零，所以 $\nabla\rho = \eta\nabla^2\boldsymbol{v}$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial\varphi} = 0,\quad \frac{\partial\rho}{\partial z}\ \text{与}\ z\ \text{无关，如是}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\Delta P}{L},\quad \Delta P = P_1 - P_2\ \text{因此}$$

$$-\frac{\Delta P}{\eta L} = \nabla^2 v(x) = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}$$

取试验的一般解

$$v = -\frac{\Delta P}{\eta L}r^2 + a\log r + b.$$

为了避免在 $r=0$ 处的奇异性，我们选取 $a=0$；得到 $v(R)=0$，选 $b = \frac{\Delta P}{\eta L}R^2$ 所以 $v = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$

因此单位时间通过管道的流体质量为

$$Q = 2\pi\rho\int_0^R vr\,dr = \frac{\pi\rho\Delta P}{8\eta L}R^4.$$

A3．解：令 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{M}_0$ 所感应的在 $\boldsymbol{M}$ 处计算的磁场

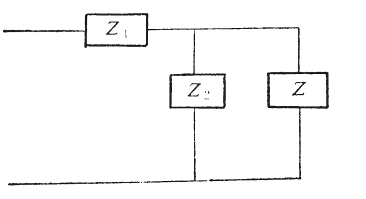

图 5

$$-V = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{MM_0}{r^3},\quad \boldsymbol{F} = \nabla(M\cdot B) = -\frac{3\boldsymbol{r}}{r}\frac{M_0M}{r^4}$$

(i) 对于圆轨道

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{3M_0M}{r^4},\ \text{因此轨道偶极子的速度是}\ v = \sqrt{\frac{3M_0M}{mr^3}}$$

(ii) 对于平面内一般的非圆轨道情形势能仍是

$$V = -\frac{MM_0}{r^3}$$

令 E 是总能量，L 是守恒角动量，那么

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U(r)$$

$$U = V + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{-MM_0}{r^3} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

圆轨道与其说对应于 U 的极小值，不如说相应于 U 的峰值，所以轨道是不稳定的．

A4．解：写出 $V = R_eV_0e^{i\omega t}$ $I = R_eI_0e^{i\omega t}$

在这里一般 V_0 和 I_0 是复数．(不过在这里我们取 V_0 为实的)瞬时功率是 $P = IV$

$$\bar P = \frac{1}{2}\{R_eV_0R_eI_0 + I_mV_0I_mI_0\} = \frac{1}{2}R_0V^*I_0$$

阻抗是 $Z = \frac{V}{I}$，所以 $\bar P = \frac{1}{2}|V_0|^2R_e\frac{1}{Z}$.

为了得到阻抗，考察等效电路　　所以

$$Z = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z}}\quad \text{或}\ Z = \frac{Z_1}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{4Z_2}{Z_1}}\right\}$$

其中　　$Z_1 = \frac{1}{i\omega c}$，$Z_2 = i\omega L$

这样 $Z = \frac{1}{2i\omega c}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right\}$　$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$，

对于 $\omega<\omega_0$ $R_eZ = 0$ $\bar P = 0$

对于 $\omega>\omega_0$ $R_e\frac{1}{Z} = \frac{1}{2\omega L}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}$

故平均功率是 $\bar P = \frac{1}{2}V_0^2\frac{1}{2\omega L}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}$.

A5．解：与流体相比较，对于磁系统压力 P 用 $-B$ 来代替、比容 v 用磁化强度 M 代替、对其余的，我们只要回忆一下(或者用标准方法，导出克劳修斯—克拉伯龙方程)换句话说，这两个相沿着曲线

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{\Delta S}{\Delta V} \Longrightarrow \frac{dB}{dT} = \frac{-\Delta S}{\Delta M},$$

处于平衡之中，在这里 $\Delta S = \Delta_n - \Delta_s$，$\Delta M = M_n - M_s = \frac{B}{4\pi}$．如是有 $B = B_c$

$$\Delta S = -\frac{B}{4\pi}\frac{dB_c}{dT} = \frac{B_0^2}{2\pi}\frac{T}{T_0^2}\left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right)$$

A6．解：令 Z 是气体粒子的垂直高度．每个粒子的平均能量是

$$\epsilon = \frac{3}{2}KT + mg\bar Z$$

式中 $\bar Z$ 是平均高度，但是高度在间隔 dz 的几率是 $P(z)dz$

$$P(Z) = \frac{1}{Q}e^{-\beta mgz},\quad \beta = \frac{1}{KT}.\quad Q = \int_0^L e^{-\beta mgz}dZ$$

如是$mg\bar{Z} = \frac{1}{Q}\int_0^L mgZe^{-\beta mgz}dZ = \frac{1}{\beta} - \frac{mgL}{e^{\beta mgL}-1}$.

但是 $C_v = \frac{\partial E}{\partial T}$，　　所以

$$\frac{C_v}{K} = \frac{5}{2} - (mgL\beta)^2 \frac{1}{(e^{\beta mgL}-1)^2} \begin{array}{l} \nearrow \frac{3}{2}, \quad T\to\infty \\ \searrow \frac{5}{2}, \quad T\to 0 \end{array}$$

A7．解：气体的速度 v 沿着 x 轴（即沿着圆柱的方向）而 $v_x \equiv v = v(x, t)$，同样压力 $P(x, t)$ 只与 x 和 t 有关．对于一级小量，由欧拉方程

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial t}$$

v 和 p 都服从具有已知声速 C 的波方程

边界条件是 $p(o, t) = \frac{f(t)}{A}$，　$v(L, t) = 0$

取所有的量为 $e^{i\omega t}$ 和 x 的（复）函数的乘积（后者我们取实部）．

有　$f(t)\longrightarrow f_0e^{i\omega t}$，$p\longrightarrow\tilde{p}(x)e^{i\omega t}$．

$v\longrightarrow\tilde{V}(x)e^{i\omega t}$，

$\tilde{p} = p_0\cos kx + \lambda\sin kx$，　$k = \frac{\omega}{C}$

在此 λ 仍是未知的．　$p_0 = \frac{f_0}{\lambda}$.

现由 $\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{i\partial P}{\partial x}$ 得到

$$\tilde{V} = \frac{ik}{\omega P_0}(-P_0\sin kx + \lambda\cos kx)$$

但是 $\tilde{v}(L) = 0$ 所以 $\lambda = P_0\tan kL$

如是 $\tilde{V}(0) = \frac{ik}{\omega}\frac{P_0}{\rho_0}\tan kL = \frac{i}{C}\frac{P_0}{\rho_0}\tan\frac{\omega L}{C}$.

$$V(t) \equiv R_e\tilde{V}(0)e^{i\omega t} = -\frac{P_0}{C\rho_0}\tan\frac{\omega L}{C}\sin\omega t,$$

（陈崇光译　黄涛校）